Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e Não Estacionários

Hélio Magalhães de Oliveira

H. Magalhães de Oliveira

Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e Não Estacionários



Dados de Catalogação da Publicação

Índices para catálogo sistemático:

1. Análise de Fourier: Matemática 517.355 515.2433
2. Análise de sinais: Telecomunicações 621.3 624

Capa: *Fábio Marins*
Projeto Gráfico: *Fábio Marins*
Revisão: *O Autor*
Impressão e acabamento: Editora Universitária da UFPE

Hélio Magalhães de Oliveira

Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco

Cidade Universitária Caixa Postal 7.800 CEP 50711-970 Recife – PE

E-mail hmo@ufpe.br URL http://www2.ee.ufpe.br/codec/deOliveira.html



Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Oliveira, Hélio Magalhães de, 1959-

Análise de Fourier e Wavelets : sinais estacionários e não estacionários/ Hélio Magalhães de Oliveira. – Recife: Editora Universitária, UFPE 2007.

342 p.,: il., fig., tab.

Inclui Bibliografia, referências e índice.

ISBN 978-85-7315-417-7 (broch.)

1. Matemática para Engenheiros – Análise de Fourier.
2. Telecomunicações – Análise de Sinais. I. Título.

517.443 CDU (2.ed.) UFPE

517.2433 CDU (22.ed.) BC2007-076

PREFÁCIO

Esta obra é redigida em espírito antagônico à escritura categórica de Matemática: <<uma convenção estrita: esconder cautelosamente os menores indícios que sugiram uma eventual possibilidade que o autor, ou o leitor, é um ente humano>> (*The Mathematical Experience*, J. Davis, R. Hersh, Boston: Birkhäuser, 1980, p.36).

As idéias de Joseph Fourier bicentenárias! Quantos contribuintes científicos resistem, com autoridade semelhante, simultaneamente nas áreas de Engenharia, Matemática e Física? Esta obra comemora os dois séculos de relevância nas ciências (1807-2007) do nascimento das idéias centrais de Fourier. Ocasião propícia. Tantos e quantos livros textos sobre a análise de Fourier... Este, em particular, enfoca uma abordagem característica, um pouco menos convencional. Uma sinopse sobre desenvolvimentos em séries ortogonais generalizadas (e.g. séries de Legendre-Fourier, Chebyshev-Fourier, ...), com ênfase na representação trigonométrica de Fourier, é apresentado. Fourier fez inúmeras contribuições à Matemática, incluindo um pioneirismo na introdução da notação $\int_a^b$ adotada hoje. A apresentação de séries envolve igualmente o fenômeno de Gibbs, os critérios para a convergência de séries (condições de Dirichlet, teorema de Fourier, teorema de Fejér), convergência l.i.m., pontual e uniforme. As implicações do "Reino de Fourier" na Engenharia Acústica são discutidas. Tópicos como notas musicais, consonâncias & dissonâncias, classificação de instrumentos musicais foram incluídos. Apresenta-se a teoria dos *tapers* de Tukey (*data windows*) e particularmente a janela de Lanczos é revistada. O uso da série de Fourier para modelar processo fractais determinísticos é ilustrado, como no caso das funções de Weierstrass, além do uso da série de Fourier como mecanismo de geração de fractais aleatórios (do tipo movimento Browniano fracionário). A passagem para o contínuo conduz à transformada de Fourier, cujas propriedades são investigadas e revisadas. O princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg é intimamente conectado à teoria de Fourier. Cálculos computacionais do espectro conduzem à transformada discreta de Fourier (DFT), cuja interpretação e propriedades são discutidas. Mecanismos para o cálculo eficiente do espectro são

também tratados (os algoritmos rápidos, ditos *transformadas rápidas*). Os resultados de Heidman sobre complexidade multiplicativa para a DFT são apresentados. Outros tipos de transformadas conectadas à transformada clássica de Fourier são apresentadas, incluindo a transformada de Walsh-Hadamard, entre outras. A análise espectral clássica evolui no final o século XX para o tratamento de sinais não estacionários. Uma vez mais, a análise moderna com base em wavelets funciona intimamente ligada à abordagem Fourier. O teorema da amostragem é discutido, com uma demonstração do tipo "viva Fourier", assim como o teorema 2BT sobre dimensionalidade de sinais. Como ferramentas potentes que generalizam as teorias clássicas, dois apêndices foram adicionados, tratando da teoria da integração de Lebesgue e da teoria das distribuições. A abordagem sobre a teoria das distribuições de Laurent Schwartz tem no texto principal um enfoque pessoal do autor, além de um apêndice no qual a apresentação segue uma rota mais formal. Parcos resultados recentes do autor foram incluídos, tais como: séries quantizadas de Fourier; wavelets de "de Oliveira"; novos algoritmos rápidos; com base em decomposição multicamada de Hadamard, autofunções do operador "transformada de Fourier"; uma probabilidade aritmética; e por fim, a transformada de Fourier em corpos finitos. Aplicações modernas da transformada de Fourier (e wavelets) na descontaminação de sinais são argumentadas com um enfoque pragmático. Mesmo os princípios de tomografia computadorizada com base em Fourier são apresentados. A adaptação da análise de Fourier para sinais estocásticos conduz às séries estocásticas de Fourier, e expansões de Kahunen-Loève. Até mesmo a modelagem não linear para sistemas com base em séries de Volterra é apresentada. Por fim, o reino de Fourier conquista definitivamente o mundo finito e digital, migrando para a transformada de Fourier de corpo finito (transformada de Galois-Fourier). Uma coletânea de mais de cem exercícios com respostas é incluída, facilitando o aprendizado e prática na aplicação destas ferramentas. Os exercícios são provenientes de um extrato de Listas de Problemas semanais e de Exercícios Escolares. Uma breve cronologia situa os principais personagens neste épico.

Além de constituir uma técnica essencial para as Engenharias, os resultados são vitais em áreas como: Óptica e Processamento com lentes; Imagens médicas (tomografia computadorizada de Raios X CT/CAT; tomografia por emissão PET/ECT; ressonância magnética nuclear NMR); em estudos da estrutura atômica da matéria (incluindo cristalografia de Raios X, microscopia óptica e por contraste de fase); e na estrutura do

Universo (radioastronomia, interferometria, estudo de fontes de radiação), além de técnicas modernas de Espectroscopia (e.g. espectroscopia de massa). A expectativa é fornecer uma visão complementar sobre as ferramentas, as aplicações e a importância do tema no mundo científico. A propósito dos Fourier (Charles Fourier × Jean Fourier), Victor Hugo mencionou redondamente equivocado sobre o legado dos dois para a posteridade...

AGRADECIMENTOS

O autor agradece aos colegas do Departamento de Eletrônica e Sistemas (DES) e, sobretudo, aos estudantes de Graduação e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco. De fato, inúmeras melhorias pedagógicas foram incitadas por comentários de bons estudantes do curso de Métodos Matemáticos da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPE, aos quais são endereçados sinceros agradecimentos. Entre estes, André Leite Wanderley, André Neumman Kauffman, Andrei de Araújo Formiga, Arquimedes José de Araújo Paschoal, Carmelo José Albanez Bastos Filho, Custódio Inácio dos Santos, Daniel Bezerra Chaves, Danilo Silva, Diego Felix de Souza, João Marcelo Monte da Silva, João Paulo Cruz Lopes Miranda, Juliano Bandeira Lima, Leandro Chaves Rego, Luciana Beltrão Espínola da Silva, Luciana Reginaldo Soares, Luiz Antônio Magnata da Fonte, Marcos Müller de Vasconcelos, Milde Silva Lira, Rafael Santos de Souza, Renato José de Sobral Cintra, Rodrigo Gurgel Fernandes Távora, Ronaldo Venâncio da Silva, Tiago Henrique Falk, Victor Miranda da Silva, (além de *uma* ou duas omissões imperdoáveis). Andréa Tenório auxiliou nas provas.

Agradecimento especial a Profª Márcia Mahon (DES), responsável pelo curso de Sinais e Sistemas, com quem venho mantendo agradáveis discussões sobre o tema desta obra e compartilhando a satisfação de ensinar e apreciar a beleza do assunto. Convém também destacar que o autor se beneficiou de comentários de colegas professores do DES, destacando-se especialmente as sugestões dos Profs. Fernando Menezes Campello de Souza, Ricardo Campello de Souza, Luiz Torres (*in memoriam*), Valdemar Cardoso da Rocha Jr. É um prazer agradecer aos meus antigos colegas de Mestrado, Francisco Barreira Pereira Jr. e Eurico Bezerra de Souza Filho, parceiros na iniciação às FFTs. Raquel Rodrigues de Oliveira auxiliou na revisão das provas. Os cuidados e os inúmeros ajustes realizados pelo Sr. Fábio Marins (Editora Universitária, UFPE) melhoraram sensivelmente a apresentação. Prof. Renato José de Sobral Cintra (Departamento de Estatística, UFPE), além de contribuir em aspectos técnicos, contribuiu de forma decisiva na melhoria da qualidade do texto. Dra. Luciana Soares contribuiu cientificamente em diversas seções e estimulou a investigação sobre wavelets. Com o Prof. Paul Jean Etienne Jeszensky (EPUSP, USP) mantive conversas sobre ensino de Engenharia, particularmente motivantes. O Magnífico Reitor da

UFPE, Prof. Amaro Pessoa Lins, interferiu pessoalmente para viabilizar a publicação desta obra – sinceros agradecimentos. Os créditos pelas fotografias de Matemáticos referenciados aqui vão para *The MacTutor History of Mathematics archive*, mantido pela University of St Andrews, Scotland. Mesmo sendo co-dedicada ao Prof. Nilson M. de Oliveira, há que se mencionar meu profundo reconhecimento pela educação científica exemplar que dele recebi, isenta de polarizações – sempre exercitada com liberdade de pensamento e apreciação límpida sobre as Ciências. O autor também agradece o incentivo recebido da família: Profª. Nereide S.S. Magalhães, Profª Icília M. de Oliveira e de Gladys de Oliveira Lira /Aluízio Lira. Tratando-se de uma primeira edição, a ocorrência de um acentuado número de erros é inevitável — adicione-se a ampla quantidade de informações compiladas e diversidade de fontes bibliográficas. Comentários e críticas construtivas por parte de leitores são, conseqüentemente, assaz bem-vindos.

Dedicado ao Prof. Nilson Magalhães de Oliveira e a
Profª Djanira Magalhães Florêncio (*in grata memoriam*),
meus pais.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Análise de Fourier

CAPÍTULO 2 Espectro de Sinais

CAPÍTULO 3 Análise de Sinais não-estacionários

CAPÍTULO 4 Fundamentos da Análise Estocástica

CAPÍTULO 5 Tópicos Especiais de Análise de Sinais

Análise de Fourier

CAPÍTULO 1

1.1 RESUMO



Jean Fourier (1768-1830).

<<Fourier descobriu que as ondas senoidais constituem os elementos irredutíveis de vibrações e ondas periódicas – verdadeiros átomos das flutuações e do fluxo.>>

Neste texto são apresentadas as ferramentas básicas para a compreensão e análise dos sinais: aquelas da *A análise de Fourier* [FOU 1822/1988]. As séries e as transformadas de Fourier (generalizadas) são investigadas, mostrando como realizar a análise de sinais determinísticos. O objetivo da análise de sinais é extrair informações relevantes do sinal através de uma decomposição ou transformação nele realizada. A análise no domínio freqüencial tem vasta aplicação em Engenharia. O primeiro contato com a série e transformada de Fourier dá-se normalmente em cursos de caráter estritamente matemático. O intuito destas notas é essencialmente discutir diversos aspectos da análise espectral, sempre procurando enfatizar analogias, ilustrações, interpretações e demonstrações facilmente compreensíveis para Engenheiros. Além do tratamento clássico, procura-se introduzir rudimentos de outras ferramentas potentes, apresentando a Transformada Discreta de Fourier (DFT e FFT), a Transformada de Fourier para sinais bidimensionais. A abordagem realizada inclui uma introdução sobre a análise de sinais não-estacionários, estudando noções sobre a Transformada de Fourier de

Tempo Curto (Transformada de Gabor) e Transformadas de Wavelets. A visão apresentada difere um pouco da abordagem clássica, Matemática, tendo um enfoque maior para a Engenharia. Há uma relativa falta de rigor na apresentação, com passagens menos formais, supressão de demonstrações, porém tentando não comprometer o objetivo principal dos manuscritos.

Sobre Representações.

A combinação linear é uma operação relativamente *natural* ao homem, desde tempos imemoriais. Um pastor, ao analisar seu rebanho, especifica, por exemplo:

$$rebanho = 6.cabras + 1.bode + 15.ovelhas\,.$$

Uma dada quantia de dinheiro pode ser decomposta e representada em tipos de cédulas, e.g.

R$15,00 = 1.*R$ 10,00* +2. *R$2,00* +1.*R$1,00.*

Uma peça musical pode ser decomposta e representada de diferentes maneiras, assim como uma partida de Xadrez pode ser anotada seguindo diferentes notações (representações).

A análise de uma substância pode ser realizada usando a decomposição em fórmula plana, estrutural, por exemplo,

$$Glicose = 6.C+12.H+6.O$$

Muitas das propriedades e fenômenos químicos podem ser mais bem compreendidos à luz desta decomposição. Para outros, tais como isomeria óptica, ela não é apropriada. A decomposição nitidamente não é única: Há variadas representações (fórmula de Harworz,...), as quais podem ser mais convenientes em situações específicas.

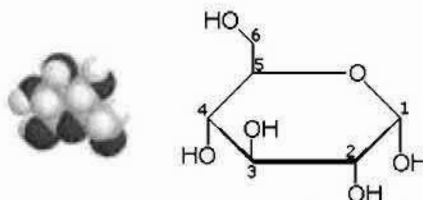


Figura 1.1 Representações para uma molécula química: Glicose.

O processo de decomposição — via combinação linear — facilita "contar", "processar", "verificar", "analisar", "modificar", "conhecer" entre outras operações.

Um texto escrito pode ser decomposto em frases; frases em palavras; e palavras em sílabas ou em letras. Assim, a decomposição

$$\text{SINAIS} = 1.A+2.I+1.N+2.S,$$

pode eventualmente ser útil (e.g. levantando a distribuição de probabilidade de letras num texto) ou de pouca valia. Devido a riqueza da estrutura associada, os sistemas lineares, as operações lineares, as transformações lineares sempre desempenharam um papel fundamental em Ciência e Engenharia.

Árvores *versus* Florestas.

Tudo o que nos diz respeito encontra-se entre o grande e o pequeno (vide a URL http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/). Afinal, vivemos entre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande[1]. Os seres vivos, por exemplo, podem ser examinados em diferentes níveis: Comunidades, grupos étnicos, ou decompondo um indivíduo em sistemas (*sistemas* → *tecidos* → *célula* → *moléculas* → *átomos* → etc.).

Uma substância em moléculas, átomos, partículas elementares, ou até em subpartículas. Tudo depende do que se analisa. Dada uma situação, não há, portanto, uma representação uniformemente superior, sempre preferível: Tudo depende "do que se deseja analisar". O nível da decomposição adequado ao fenômeno depende muito fortemente das questões que se procura responder.

---

[1] *"Rien ne peut fixer le fini entre les deux infinis qui l'enferment et le fuient."* **B. Pascal**, Pensées 199-72 http://www-users.cs.york.ac.uk/~susan/cyc/g/googol.htm

É claro que ao focalizar num nível mais detalhado, perde-se a noção do todo. Esse é exatamente o mecanismo comum nas análises (geografia física ou humana, mapas, telescópios, microscópios etc.). Ver-se-á que a análise moderna de sinais, com base em decomposição de wavelets, permite esta abordagem de modo natural. Esse enfoque, conhecido como *Análise Por Multirresolução* [MALL 1989], é uma das bases dos mecanismos atuais de análise de sinais.

Por que a análise de Fourier constitui uma ferramenta tão potente, de primeira escolha? Experimente visualizar um sinal de voz ou de áudio registrado no gravador do seu microcomputador. Verifique como as variações do tipo "periódicas & senoidais" são inteiramente naturais, ordinárias e adaptadas. Fourier descobriu que as ondas senoidais constituem os elementos irredutíveis de vibrações e ondas periódicas – verdadeiros átomos das flutuações e do fluxo [von BAE 1999]. Daí o fato de valer-se delas como ferramentas para análise de *primeira linha* na investigação de sinais. Uma das "fraquezas" desta análise é o fato de que ela não explora a noção de resolução e multiescala. A análise de wavelets [BRU *et al*. 1996, BULT 1995] veio exatamente suprir essa lacuna...

1.2 A EXPANSÃO EM SÉRIE DE SINAIS ORTOGONAIS

Suponha o espaço vetorial Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno usual e uma base de vetores ortogonais $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, ..., \vec{V}_n\}$. Um vetor $\vec{V}$ qualquer do espaço pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base [LANG 1971], ou seja,

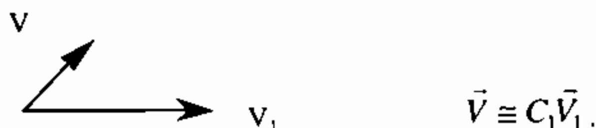
$$V = C_1\vec{V}_1 + C_2\vec{V}_2 + C_3\vec{V}_3 + ... + C_n\vec{V}_n .$$

O leitor pode verificar facilmente que os coeficientes C_i são dados por :

$$C_i = \frac{<\vec{V}, \vec{V}_i>}{<\vec{V}_i, \vec{V}_i>}, \qquad i = 1, 2, 3, ... , n$$

em que <.,.> é o produto interno usual entre vetores no espaço euclidiano.

Entretanto, quando se deseja expressar um vetor $\vec{V}$ como combinação linear de certo número *m* de vetores ortogonais *inferior* à dimensão do espaço[2], existe a possibilidade de se cometer um erro. O tratamento aqui segue [LATHI 1979] ilustrando o fato no $\mathbb{R}^2$, ao tentar expressar um vetor $\vec{V}$ por um vetor na dimensão de $\vec{V}_1$ (colinear), tem-se:



$$\vec{V} \cong C_1\vec{V}_1 .$$

Figura 1.2 Aproximação vetorial: *V* deve ser aproximado por um vetor na direção de V_1.

O erro cometido nesta aproximação corresponde ao vetor: $\vec{V}_e := \vec{V} - C_1\vec{V}_1$.

A idéia para realizar-se uma boa aproximação consiste em efetuar uma escolha adequada para C_1, de modo a minimizar o erro cometido. Entretanto, o erro corresponde a um vetor e não pertence a um corpo ordenado (vide relação de ordem).

Uma solução bastante intuitiva consiste em minimizar o comprimento do vetor de erro, expresso pela sua Norma (induzida por um produto interno): $\| \vec{V}_e \| := \sqrt{< \vec{V}_e, \vec{V}_e >}$. O menor erro é cometido quando se considera a projeção do vetor $\vec{V}$ sobre o vetor $\vec{V}_1$ da base, como indicado na figura.

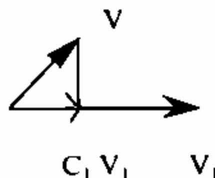


Figura 1.3 Aproximação (na horizontal) de um vetor no plano.

---

2 e.g., imagine um ser bidimensional observando figuras tridimensionais (uma barata em passeio pelo solo, sem perceber o que há em cima). Ou imagine uma formiga andando num cordão (caso unidimensional).

Pode ser verificado graficamente que qualquer outra escolha resulta em um erro maior, lembrando que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento sempre maior que qualquer um dos catetos. Assim,

$$C_1 \| \vec{V}_1 \| = \mathrm{Proj}_{\vec{V}_1} \vec{V} = \| \vec{V} \| . \cos\theta$$

Usando o fato conhecido da geometria analítica [LANG 1971] que o ângulo entre os dois vetores $\vec{V}$ e $\vec{V}_1$ é dado por :

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{V}, \vec{V}_1 \rangle}{\left\| \vec{V} \right\| \cdot \left\| \vec{V}_1 \right\|},$$

Segue-se então que $C_1 = \dfrac{\langle \vec{V}, \vec{V}_1 \rangle}{\langle \vec{V}_1, \vec{V}_1 \rangle}$.

Em geral, a melhor representação de um vetor $\vec{V}$ em termos de um conjunto de vetores *ortogonais* (LI), no sentido de minimizar a norma do vetor de erro é (A igualdade é atingida para $m=n$):

$$\vec{V} \cong \sum_{i=1}^{m} C_i \vec{V}_i \text{ , com } \quad C_1 = \frac{\langle \vec{V}, \vec{V}_1 \rangle}{\langle \vec{V}_1, \vec{V}_1 \rangle} \qquad i = 1,2,3, \ldots, m.$$

No caso de sinais, considera-se um produto interno $< f(t), g(t) >$ de funções reais $f(t)$ e $g(t)$, definidas em um dado trecho $a<t<b$. (ver prob. 2 e 3). Por analogia, tentar-se-á obter uma aproximação para uma função $f(t)$ definida neste intervalo, em termos de um conjunto de funções ortogonais par-a-par.

Para a análise (decomposição) de sinais no tempo, $-\infty<t<+\infty$, o estudo restringe-se *sempre* a uma "janela" finita $a<t<b$, na qual o sinal é estudado. Ver-se-á que a fixação deste intervalo é essencial e obrigatória no processo de expansão.

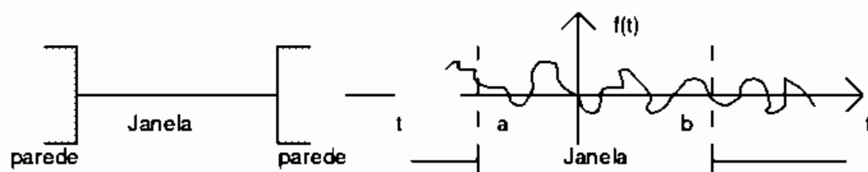


Figura 1.4 Exemplo de Janela (unidimensional) usada no desenvolvimento de um sinal contínuo.

Definição:

Um conjunto de sinais definidos em $a<t<b$ é dito ser ortogonal, se e somente se o produto interno entre cada par verifica $\langle \phi_i(t), \phi_k(t) \rangle = K_j \cdot \delta_{i,k}$, em que $\delta_{i,k}$ é o símbolo de Kronecker, $\delta_{i,k} := \begin{cases} 0 & se \quad i \neq k \\ 1 & se \quad i = k \end{cases}$ ■

Se $(\forall j)$ $K_j=1$, então as funções são ditas serem ortonormais. Esta definição provém do cálculo do ângulo θ entre vetores f e g:

Se $\theta=90^o \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow <f,g>=0$.

Procurando expressar $f(t)$ como combinação linear das funções ortogonais, tem-se:

$$f(t) \cong C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + ... + C_m\phi_m(t), \qquad a<t<b.$$

Os valores dos C_i's são chamados de coeficientes de Fourier da expansão.

O erro cometido na aproximação é uma função $f_e(t)$ definida em $a<t<b$, como:

$$f_e(t) := f(t) - \sum_{i=1}^{m} C_i\phi_i(t).$$

A função de erro $f_e(t)$ também não pertence a um corpo ordenado; uma solução para efetuar uma escolha para os coeficientes consiste em minimizar *uma* norma $\| f_e(t) \| = < f_e(t), f_e(t) >^{1/2}$ definida em um espaço produto interno positivo definido[3]. Deste modo, podem ser obtidas séries ortogonais nas funções de Hankel-Bessel, Legendre, Gegenbauer (Ultra-Esféricas), *Prolate Spheroidal*, Trigonométricas, Séries Cardinais de Wittaker-Shannon, etc.; ou Séries Ortogonais de Hermite, Jacob, Laguerre, Chebyshev, entre outras [ABA&STE 1968], [SNE 1976], [GRA&RYZ 1965].

A escolha dos coeficientes deve ser feita de modo a minimizar a norma do erro, ou de modo equivalente, seu quadrado.

$$\xi := \| f_e(t) \|^2$$

[3] O produto deve ser também Hermitiano, se sinais complexos são considerados.

O problema de minimização Min ξ deve ser solucionado, em que

$$C_i$$

$$i=1,2,\ldots m$$

$$\xi=<f(t)-\sum_{i=1}^{m}C_i\phi_i(t), f(t)-\sum_{i=1}^{m}C_i\phi_i(t)>.$$

Utilizando a definição de produto interno, segue-se que:

$$\xi=<f(t),f(t)>-\sum_{i=1}^{m}C_i<f(t),\phi_i(t)>-\sum_{j=1}^{m}C_j<f(t),\phi_j(t)>+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}C_iC_j<\phi_i(t),\phi_j(t)>$$

Lembrando da ortogonalidade dos ϕ_i's, a equação simplifica-se:

$$\xi=\|f(t)\|^2-2\sum_{i=1}^{m}C_i<f(t),\phi_i(t)>+\sum_{i=1}^{m}C_i^2<\phi_i(t),\phi_i(t)>.$$

No ponto de Mínimo[4], **grad**$\boldsymbol{\xi}$ = $\underline{0}$, isto é, $\nabla\xi(C_1,C_2,\ldots,C_m)=\underline{0}$.

$$\frac{\partial\xi}{\partial C_1}=\frac{\partial\xi}{\partial C_2}=\ldots=\frac{\partial\xi}{\partial C_m}=0.$$

Tomando-se a derivada parcial na expressão de $\frac{\partial\xi}{\partial C_i}=0$, obtém-se os valores para os coeficientes de Fourier (aqueles que minimizam a norma do erro acima definido):

$$C_i=\frac{<f(t),\phi_i(t)>}{<\phi_i(t),\phi_i(t)>}$$ para i=1,2,3,...,m .

O resultado mais importante ao se considerar conjuntos ortogonais é que o aumento de m (introdução de mais um sinal ortogonal) *não altera a solução prévia dos demais coeficientes* obtidos no Problema de Minimização: Necessita-se apenas calcular o novo coeficiente introduzido.

Logo a expansão em série de funções ortogonais pode ser feita considerando funções $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{+\infty}$ ortogonais de acordo com um produto interno definido positivo e o desenvolvimento é expresso por:

$$f(t)\cong\sum_{i=1}^{\infty}C_i\phi_i(t),\quad a<t<b,\ \text{em que}\ C_i=\frac{1}{K}<f(t),\phi_i(t)>\quad(\forall i).$$

---

[4] As condições de segunda ordem (matriz Hessiana) podem ser verificadas pelo leitor mais exigente.

Note a importância de considerar um espaço produto interno. O Produto Interno define ângulos, ortogonalidade e induz uma norma para medição de erros. Rigorosamente, o espaço de sinais constitui um Espaço de Hilbert (**David Hilbert**) [KOL&FOM 1970].

Espaço de Hilbert. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial de dimensão infinita, sobre os complexos, munido de um produto interno positivo definido, tal que a norma induzida pelo produto interno verifica a seguinte propriedade:

$$\forall \{f_n\} \mid \lim_{n,m \to \infty} \| f_n - f_m \| = 0 \Rightarrow \exists! \{f\} \mid \lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0 .$$ ■

Assim, não se consegue construir uma base "clássica", como nos casos tratados anteriormente. Para qualquer m finito, a cada novo vetor linearmente independente (LI) colocado no conjunto dos ϕ_i's, ainda restam outros vetores LI. Normalmente, consideram-se sistemas ortogonais completos, de modo a garantir a unicidade no desenvolvimento em série, como discutido a seguir.

<u>**Definição:**</u>

Um sistema ortogonal $\{\phi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ é completo, se para todo trecho de sinal $f(t)$, $a<t<b$, com $\| f(t) \| < +\infty$ verificando $(\forall i) < f(t), \phi_i(t) >= 0$, tem-se que $f(t)=0$ em todos os pontos de continuidade de $f(t)$. Nota-se[5] $f(t)=_{\text{p.p.}}0$. ■

<u>**A unicidade**</u>

Sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$, $a<t<b$, com $\| f_i(t) \| < +\infty$, funções apresentando o mesmo desenvolvimento em série para um dado sistema ortogonal **completo**. Então $f_1(t)=f_2(t)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade. ■

<u>Prova.</u>

A unicidade é verificada facilmente definindo-se uma função $h(t):=f_1(t)-f_2(t)$ e observando-se que $\| h(t) \| \leq \| f_1(t) \| + \| f_2(t) \| < +\infty$.

---

[5] p.p.=*presque partout* (quase em toda parte). Muitos textos adotam a.e.=*almost everywhere*.

Logo, $(\forall i) < h(t),\phi_i(t) >=< f_1(t),\phi_i(t) > - < f_2(t),\phi_i(t) >$. Lembrando que os coeficiente correspondentes são idênticos nos dois desenvolvimentos em série, tem-se $(\forall i)$ $< h(t),\phi_i(t) >= 0$. Como o sistema ortogonal é completo, segue-se que $h(t)$=0 em todos os pontos de continuidade, concluindo a dedução.

Q.E.D.

Interpretação: Se $\exists$ sinal *f*, $a<t<b$, não nulo, ortogonal a todos os sinais do conjunto $\{\phi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, ele deveria ser introduzido no próprio conjunto, i.e., o sistema ainda não estaria "completo". A completicidade lembra a noção de base. As séries de Fourier convencionais são obtidas considerando o produto interno usual de funções, definido por:

$$< \phi_i(t),\phi_k(t) >:= \int_a^b \phi_i(t)\phi_k(t)dt.$$

A definição clara e inequívoca do intervalo (*a*, *b*) é imprescindível para definir o produto interno. Observe a forte analogia com o produto escalar usual no espaço euclidiano, definido por $< \underline{x}, \underline{y} >:= \sum_{i=0}^{N} x_i y_i$ enquanto que a mesma soma no *continuum* vale $< x(t), y(t) >= \int_{t_0}^{N} x(t)y(t)dt.$

Digressão:

A definição de produto interno conduz a definição de classes de sinais de interesse:

$L^1(\boldsymbol{R})$ *e* $L^2(\boldsymbol{R})$ (denota-se aqui L^2 e L^1 para simplificar) [FIGU 1977, KOL&FOR 1970].

$f \in L^1(a,b) \quad \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt < \infty$ e $\int_a^b | f(t) | dt < \infty$

(integráveis e absolutamente integráveis).

$f \in L^2(a,b) \quad \Leftrightarrow \int_a^b f^2(t)dt < \infty$ e $\int_a^b | f(t) |^2 dt < \infty$

(quadrado integrável, energia finita).

Note que para *a* e *b* finitos, $f \in L^2 \Rightarrow f \in L^1$, o que segue a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\int_a^b | f(t) | dt \leq \sqrt{(b-a)}\left[\int_a^b | f^2(t)dt\right]^{1/2}.$$

A menos que seja mencionado em contrário, este será o produto interno utilizado. Portanto um conjunto $\{\phi_i(t)\}$ será dito ortogonal se e somente se:

$$\int_a^b \phi_i(t).\phi_k^*(t)dt = k_i \delta_{i,k} \quad (\forall i,k).$$

A série de *Fourier Generalizada* considera um conjunto ortogonal $\{\phi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, sendo expressa por:

$$f(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t),\ a<t<b,$$

com coeficientes de Fourier expressos por $C_i = \frac{1}{K_i} \int_a^b f(t).\phi_i(t)dt.$

Neste caso particular, é possível uma interpretação bastante interessante para o critério de erro utilizado.

• Imaginando que uma possibilidade consiste em procurar minimizar o valor médio do erro no intervalo estudado. ($\bar{f}_e := \frac{1}{b-a} \int_a^b f_e(t)dt$), pode ser verificado que este critério não é desejável. *Erros por excesso* são compensados por *erros por falta*, podendo resultar erro nulo para uma má aproximação.

• Este problema pode ser evitado utilizando o valor médio do módulo como medida de erro ou o valor médio quadrático do erro. No último caso:

$$\overline{f_e^2} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f_e^2(t)dt\ .$$

Este critério, muito atrativo, é o mais utilizado nas várias situações em que se deseja avaliar o erro cometido por aproximações. Erros de pequena intensidade são tratados de modo diferente de grandes erros, os quais são "penalizados" pela função quadrática. Pode ser prontamente observado que a série generalizada minimiza do erro médio quadrático (EMQ), pois:

$$\| f_e(t) \|^2 = \int_a^b f_e^2(t)dt\ .$$

O valor do EMQ pode ser avaliado sem dificuldades, desenvolvendo $\bar{f}_e^2$, lembrando as integrais que se anulam e usando o fato que $\int_a^b f(t)\phi_i(t)dt = K_i C_i$.

Assim,

$$\overline{f_e^2} := \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f^2(t)dt - \sum_{i=1} K_i C_i^2\right\}.$$

Se $f(t)$ é de quadrado integrável, então vale a *Desigualdade de Bessel*.


Freidrich Bessel (1784-1846).

TEOREMA (desigualdade de Bessel). Se $\{\phi_i(t)\}$ é um conjunto ortogonal, e se $f \in L^2$ (i.e., $\|f\|<+\infty$), então a expansão ortogonal $f(t) \cong \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t)$ verifica $\sum_{i=1}^{\infty} K_i C_i^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f(t)\|^2$. ■

Isso significa que a aproximação ortogonal tem sempre energia menor que o sinal decomposto, não importando o número de termos da série. A energia da versão aproximada (truncada ou não) é limitada pela energia do sinal.

<u>**Corolário**</u>. Se $f \in L^2$, então, $\lim_{n \to \infty} |C_n| = 0$ (os coeficientes de Fourier vão a zero). ■

Pode ser demonstrado o seguinte resultado para um conjunto $\{\phi_m(t)\}$ ortogonal completo:

TEOREMA (CONVERGÊNCIA EMQ):

Se $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ é de quadrado integrável, i.e., $\int_a^b f^2(t)dt < +\infty$,

então, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i\phi_i(t) \right|^2 dt = 0.$ Isto significa que o EMQ da série Generalizada de Fourier tende a zero. ■

Denota-se este fato por $f(t) = l.i.m.\sum_{i=1}^{\infty} C_i\phi_i(t)$, em que *l.i.m* são as iniciais de Limit In (the) Mean. Isto *não significa* uma convergência ponto a ponto. A energia do sinal de erro tende a zero quando se aumenta indefinidamente o número de termos no desenvolvimento. Este comportamento só se verifica para conjuntos completos.

Note que no critério de aproximação de $f_N(t) \to f(t)$ a medida que N cresce, assegura-se somente que $\|f_N(t)-f(t)\|=0$ (Norma do erro vai a zero quando a série passa ao limite $N\to\infty$).

Corolário. Para funções de quadrado integrável, se há convergência EMQ, então vale a *Identidade de Parseval*[6]:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} K_i C_i^2 = \int_a^b f^2(t)dt .$$

TEOREMA. Um sistema $\{\phi_n(t)\}$ para o qual o EMQ vai a zero é um sistema completo. ■

Prova. Por *reductio ad absurdum*. Seja $\|f\|<+\infty$ e $<f,\phi_n>=0$ $(\forall n)$. Deseja-se mostrar que $f(t)=_{\text{p.p.}} 0$.

Se $<f,\phi_n>=0$, então todos os coeficientes da representação ortogonal de f são nulos. Pela identidade de Parseval,

$\| f \|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} | f(t) |^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n C_n = 0$. Para mostrar que $\|f\|=0 \Rightarrow f(t)=_{\text{p.p.}} 0$

6 Identidade generalizada para conjuntos $\{\phi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ completos.

usa-se redução ao absurdo. Suponha que existe um intervalo $I \subset (-T/2,T/2)$ tal que $f(t)\neq 0$, $t\in I$. Como $\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt=0$, então $0=\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt=\int_I+\int_{I^c}>\int_I|f(t)|^2\,dt>0$ Absurdo!.

Q.E.D.

Um dos resultados mais celebrados da teoria de Fourier é o seguinte teorema (devido a **Frigyes Riesz**):

TEOREMA DE RIESZ-FISCHER (1907).

Dado um sistema ortonormal $\{\phi_n(t)\}$, se $\{C_n\}$ constitui uma seqüência tal que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2<+\infty$, então os $\{C_n\}$ são coeficientes de Fourier de algum sinal de energia finita, i.e.

$$\exists\ f\in L^2 \mid \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2=\|f\|^2 \ \text{com}\ C_n=<f(t),\phi_n(t)> \quad (\forall n).\ \blacksquare$$

Uma das aplicações interessantes da decomposição de Fourier relaciona-se com a solução do problema isoperimétrico (vide a lenda da fundação da cidade de Cartago por Dido). Mostra-se que entre todas as curvas fechadas de mesmo perímetro, o círculo é a que engloba maior área [FIGU 1977].

1.3 A SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

A representação clássica da série de Fourier é obtida escolhendo o conjunto de funções ortogonais $\{\phi_m(t)\}$ composto por funções trigonométricas. Para desenvolver-se uma função $f(t)$, $a<t<b$, em série, considera-se o conjunto: $\{\phi_m(t)\}=\{\text{sen}\ mw_0t\ ,\ \cos\ mw_0t\}_{m=0}^{+\infty}$, em que w_0 é a chamada freqüência da fundamental.

De um modo geral, costuma-se usar a notação $f(t)$, $t_0<t<t_0+T$, para explicitar a amplitude do intervalo/janela considerado ($t_0=a$ e $T=b-a$). Faz-se necessário enfatizar o intervalo no qual se considera o desenvolvimento, e a freqüência da fundamental, outrossim, o resultado

não tem nenhum *sentido*. Para sinais periódicos, freqüentemente a janela coincide com o período do sinal.

A freqüência fundamental w_0 deve ser escolhida como $w_0=2\pi/T$ *para garantir a ortogonalidade* das funções $\{\phi_m(t)\}$;

$\forall$ n,m inteiros, valem as relações:

$< sen\ nw_0t, cos\ mw_0t > = < cos\ nw_0t, sen\ mw_0t > = 0,$

$< sen\ nw_0t\ , sen\ mw_0t > = < cos\ nw_0t\ , cos\ mw_0t > = T/2\ \delta_{n,m} \quad n\neq 0,\ m\neq 0.$

O produto interno é $<\phi_n(t),\phi_m(t)>=\int_{t_0}^{t_0+T}\phi_n(t)\phi_m(t)dt$.

Tentativas e abordagens próximas à série de Fourier foram propostas por Matemáticos como Euler, d'Alembert, Bernoulli etc., porém, pressentindo as dificuldades envolvidas, todos falharam por não ousarem mais (nota histórica sobre Fourier em http://www2.ee.ufpe.br/codec/JBFourier.html).

Pode ser mostrado que $\{\phi_i(t)\}_{n=0}^{+\infty}$ definido da forma acima indicada, constitui um conjunto ortogonal completo. Daí o porquê de não se utilizar apenas cossenos (ou senos)[7] para se obter o desenvolvimento em série. A série trigonométrica de Fourier para uma função $f(t)$, $t_O<t<t_O+T$, pode ser escrita sob a forma:

$$f(t)\cong a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nw_0t)+b_n\,\text{sen}(nw_0t),\quad t_0<t<t_0+T,$$

em que $w_O=2\pi/T$ e os coeficientes de Fourier são dados por :

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,dt;$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos nw_0t\ dt\quad,\ n\geq 1\ ;\ b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,\text{sen}\,nw_0t\ dt\quad,\ n\geq 1\ .$$

É interessante observar que se o sinal $f(t)$ é uma tensão (ou corrente), o valor de a_O representa o *nível dc* do sinal periódico correspondente a $f(t)$.

As vantagens do uso da série de Fourier com relação às outras expansões em séries de funções ortogonais são:

---

[7] É interessante observar o fato que o ouvido humano é praticamente insensível à fase do sinal, respondendo apenas a $|C_n|$. Logo, tanto pode ser usado o seno ou cosseno quando o receptor for o ouvido humano.

a) A série minimiza o erro médio quadrático, o qual é um critério de erro muito interessante, matematicamente simples e com rica interpretação.

b) Devido a *periodicidade* dos ϕ_m\`s, a série adequada para o desenvolvimento de funções periódicas. Existe também inerente a esta escolha, uma rica interpretação em termos de "componentes periódicas que constituem o sinal".
(funcionam como bases canônicas dos espaços euclidianos).

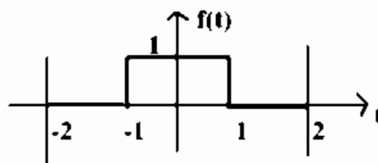
Uma outra forma muito comum de apresentação da série trigonométrica de Fourier é $n \geq 1$.

$$f(t) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nw_0 t + \phi_n),\ w_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ em que } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ e } \phi_n = -tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Sugestão: Desenvolva $\cos(n\omega_0 t + \phi_n) = \cos\phi_n . \cos n\omega_0 t - \text{sen}\,\phi_n . \text{sen}\,\omega_0 t$ e compare com a representação trigonométrica canônica.

Exercício 1

Desenvolver em série trigonométrica de Fourier a função $f(t)$ definida em $-2<t<+2$, esboçada na figura em seguida.



Solução: Tem-se que T=4 e $w_0=\pi/2$. Logo,

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} dt = \frac{1}{2}\quad , \quad a_n = \frac{2}{4}\int_{-1}^{+1} \cos\frac{n\pi t}{2}\, dt = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \quad \text{e } b_n = 0 .$$

A função conhecida como *função sample* (Função Amostral) é sem dúvida a mais importante função em Análise de sinais. Seu gráfico é representado a seguir, lembrando do resultado fundamental de Cálculo I que: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$. A função amostral *Sa*(.) é também freqüentemente descrita na literatura através da relação *Sinc*(x):=*Sen*(πx)/(πx). Esta

função foi nomeada por **P.M. Woodward** (*Probability and Information Theory, with Applications to Radar*, 1953).

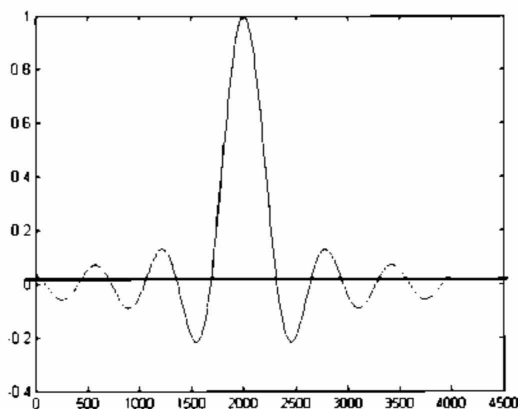


Figura 1.5 Função Amostral (função *sample*).

Logo, $a_0=\frac{1}{2}$, $a_n=Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ e $b_n=0$ resultando

$$f(t)\cong\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi t}{2},\quad -2<t<2.$$

Qual o valor obtido pela série para $f(1)$ e $f(-1)$?

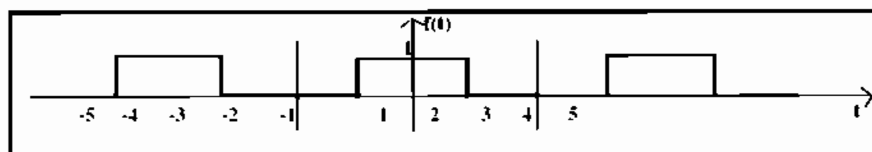


Figura 1.6 Sinal periódico (onda quadrada).

Se a função considerada para o desenvolvimento em série é uma função periódica, então a representação é válida na reta real $-\infty<t<+\infty$. A série de Fourier em $-2<t<2$ obtida anteriormente representa também a função em qualquer intervalo.

APPLETS SOBRE SINTESE DE FOURIER

- http://www.earlevel.com/Digital%20Audio/harmonigraf.html
- http://www.ufv.br/dma/intermat/APPLETS/CALCULO4/fourier/fourier.htm
- http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/syntfour.html
- http://www.ece.unb.ca/thesis98/ee4000aj/Fourieralt.html
- http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=33

APPLETS SOBRE HARMÔNICOS

- http://mysite.verizon.net/vzeoacw1/harmonics.html
- http://www.cepa.if.usp.br/fkw/sound/sound.html
- http://library.thinkquest.org/19537/cgi-bin/showharm.cgi

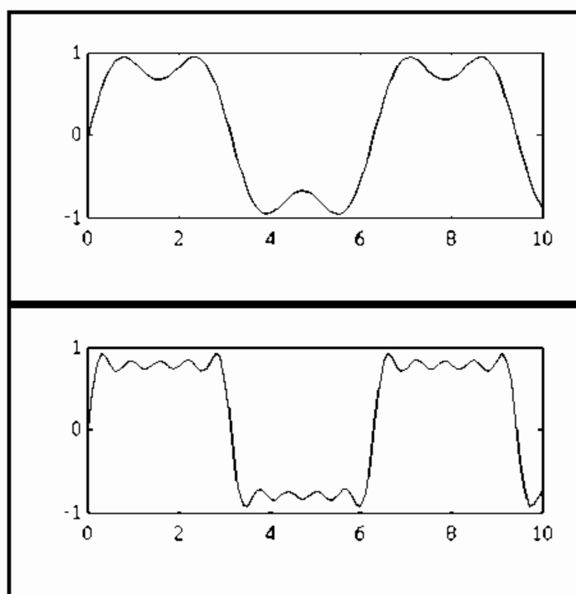


Figura 1.7 Convergência da série de Fourier (a) até o 3º harmônico (b) até o 9º harmônico.

O conceito de unicidade da série de Fourier deve ser bem entendido. *Duas funções apresentando a mesma série são sempre idênticas a menos dos pontos de descontinuidade. Para um sinal periódico, a unicidade também é válida no sentido que apenas uma série de Fourier representa este sinal, nos pontos de continuidade em* $-\infty<t<+\infty$.

Para uma função aperiódica $f(t)$, $a<t<b$, é possível o uso de várias séries de Fourier diferentes que a representam neste intervalo. Por exemplo, a função $f(t)=t^2$ $0<t<1$, pode ser representada pelo desenvolvimento em série de uma das várias funções periódicas (extensões). Modificar o tamanho da Janela implica em alterar o conteúdo harmônico do sinal e outra série diferente é obtida!

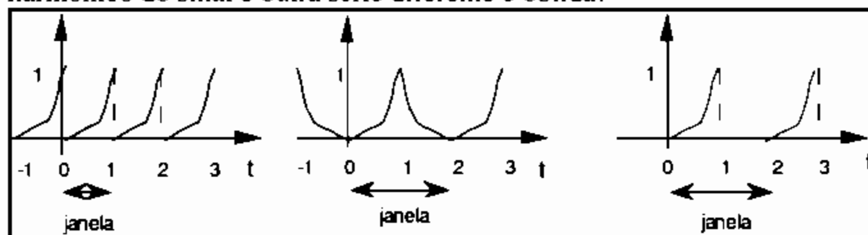


Figura 1.8 Diferentes sinais periódicos para representar t^2, $0<t<1$.

Para sinais de quadrado integrável, a relação de Parseval descrita na seção precedente resulta em:

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt .$$

A representação de um sinal $f(t)$ no domínio das freqüências é denominada de espectro (cuja etimologia provém do Latim, *Spectrum*=fantasma), termo cunhado por Sir **Isaac Newton**. A maior parte dos sinais é estudada e interpretada no domínio freqüencial, daí a importância da análise do espectro. No desenvolvimento em série observa-se que a menor freqüência presente no sinal, w_O, é a chamada de freqüência fundamental. As demais freqüências são múltiplas deste valor, nw_O, e são chamadas de harmônicos. Neste caso, caracteriza-se seu espectro discreto. A representação do espectro é feita de modo a fornecer informações sobre a amplitude e a fase das várias componentes "freqüências" do sinal.

1.4 ÁUDIO, ENGENHARIA ACÚSTICA, MÚSICA E INSTRUMENTOS

<<A análise de Fourier implica no fato que muitos sinais irregulares são "dissecados" numa superposição de muitos ritmos regulares com várias magnitudes e freqüências>>

Em óptica, a luz de qualquer matiz pode ser sintetizada a partir de cores fundamentais do arco-íris. Em música, ela descreve como o som pode ser analisado como uma mistura de tons puros. O som tem três características: a altura, a intensidade e o timbre.

O ouvido humano pode escutar nominalmente sons na faixa de até 20 kHz, sendo que o limite superior tende a decrescer com a idade (a maioria dos adultos não consegue escutar acima de 16 kHz). A faixa de sons perceptíveis pelo ouvido humano é da ordem de 10 oitavas, ou 2^{10}, ou 1024:1, ou seja, de 16 Hz a 16 kHz (assume-se que a faixa audível tipicamente é de 20 Hz a 20 kHz).

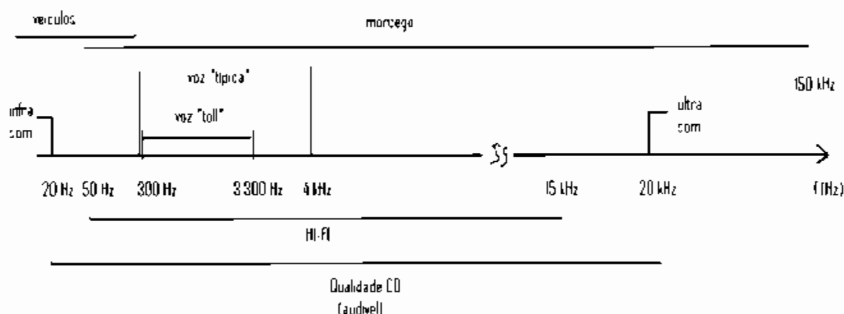


Figura 1.9 Faixas de freqüência de áudio e contíguas: infra-som, sons audíveis (voz e música), ultra-som.

A altura do som relaciona-se com a freqüência (audível 20 Hz a 20 kHz). Um som mais baixo (respectivamente alto) é mais grave (respectivamente agudo). A intensidade relaciona-se com a amplitude dos coeficientes de Fourier da decomposição. A faixa de freqüências entre dois tons é referida como intervalo.

	intervalo	
Dó	uníssona	1/1
Ré	2ª maior	
Mi	3ª maior	
Fá	**quarta**	4/3
Sol	quinta	3/2
Lá	6ª maior	
Si	7ª maior	
Dó	oitava	2/1

Por exemplo, um dó com fundamental 500 Hz está uma quinta acima de uma nota sol em 375 Hz. Um tom em 1 kHz corresponde a um dó uma oitava acima do dó em 500 Hz. A escala musical é sempre em escala logarítmica, sendo adotada a base 2 (oitavas). As notas são caracterizadas pela fundamental. A amplitude especifica a intensidade do som, i.e., a potência produzida pela fonte sonora. O timbre especifica a combinação harmônica gerada. Em todos os instrumentos musicais, o som é constituído de uma nota fundamental e de certo número de harmônicos que o caracterizam. Os primeiros harmônicos determinam o timbre do som, enquanto os de ordem mais elevada tem importância no "brilho". Um violino, uma flauta e um piano, produzindo uma mesma nota dó (mesma freqüência), fornecem sons ligeiramente diferentes. Embora produzam a mesma fundamental (dó), o conteúdo harmônico produzido por cada instrumento é diferente. Pela mesma razão, duas pessoas repetindo uma frase idêntica apresentam timbres diferentes, permitindo reconhecer o falante.

A flauta doce, por exemplo, é um dos instrumentos musicais de som mais puro, i.e., de menor conteúdo harmônico. A esse respeito, recomenda-se escutar o magnífico flautista clássico **Jean Pierre Rampal** (1922 – 2000) tocando composições do barroco.



Jean Pierre Rampal.

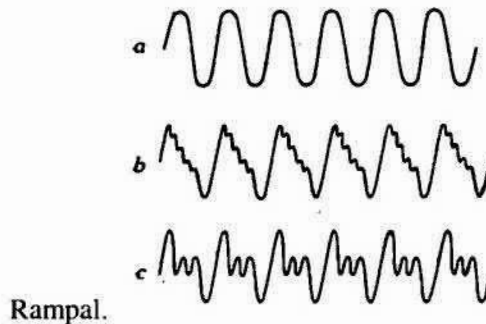


Figura 1.10 a) Forma de onda de uma nota dó pura em 512 Hz b) Mesma nota emitida por um piano c) Mesma nota emitida por órgão.

GUIDO d'AREZZO E AS OITAVAS

O Músico italiano **Guido d'Arezzo** (1ª metade do séc. XI) adaptou o sistema musical usado na Grécia antiga: Criou nomes latinos e desenvolveu um sistema de linhas, espaços e sinais. Para ensinar este sistema, usou um Hino honorífico a São João Batista (composto no século VII).

In: *Monumenta Monódica Medii Aevi*

***Ut** queant laxis*		Para que possam livremente
***Re**sonare fibris*	(teus)	filhos proclamarem
***Mi**rage storum*	(as)	maravilhas
***Fa**muli tuorum*		dos teus feitos

Solve polluti absorve-os
Labii reatum purifica-lhes os lábios
Sancte Johannes Ó São João.



Figura 1.11 Origem das notas: d´Arezzo e o hino a São João Baptista.

A escala diatônica (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó) já era usada pelos gregos antigos e tornou-se a escala de referência da música ocidental contemporânea. A cada oitava (dobro da freqüência), as notas se reproduzem. Por exemplo, 250 Hz corresponde a um dó, uma oitava acima, em 500 Hz, tem-se novamente um dó. A escala internacional (Londres 1939) hoje adotada define o Dó em 512 Hz. Todas as freqüências que são potências de 2 correspondem, portanto, a uma nota dó, o que facilita tremendamente uma avaliação rápida.

A idéia é que uma nota soa "algo similar" ao seu segundo harmônico, pois há dois ciclos completos no intervalo de tempo que corresponde a um ciclo, podendo uma forma de onda "estar contida" na outra: todos os zeros do sinal de menor freqüência são também zeros do sinal de maior freqüência, o seu 2º harmônico (vide ilustração a seguir).

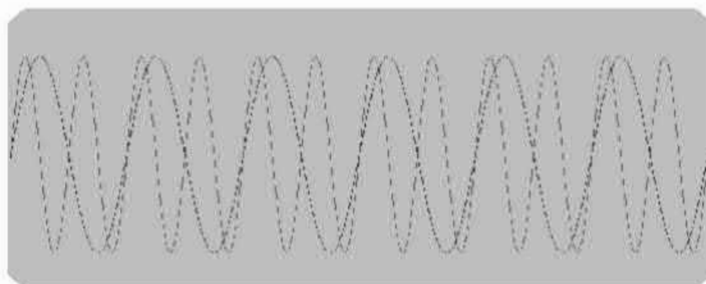


Figura 1.12 Dois sinais harmônicos: Observe que todos os zeros do sinal mais lento estão também presentes no sinal mais rápido.

Os intervalos musicais (dentro de uma oitava) são apresentados na tabela a seguir.

Tabela I.1 Os intervalos musicais (dentro de uma oitava).

INTERVALO	TOM	f_2/f_1	
prima	**dó**	**1,000**	**1/1**
semitom	dó #	1.042	25/24
2ª menor	ré ß	1.080	27/25
2ª maior	**ré**	**1,125**	**9/8**
2ª sustenida	ré #	1.172	75/64
3ª menor	mi ß	1.200	6/5
3ª maior	**mi**	**1,250**	**5/4**
4ª bemol	fá ß	1.280	32/25
3ª aumentada	mi#	1.302	125/96
4ª	**fá**	**1,133**	**4/3**
4ª aumentada	fá #	1.389	28/18
5ª bemol	sol ß	1.440	36/25
5ª	**sol**	**1,500**	**3/2**
5ª sustenida	sol #	1.562	25/16
6ª menor	lá ß	1.600	8/5
6ª maior	**lá**	**1,667**	**5/3**
6ª sustenida	lá #	1.736	125/72
7ª menor	si ß	1.800	9/5
7ª maior	**si**	**1,875**	**15/8**
8ª bemol	dó ß	1.920	48/25
7ª sustenida	si #	1.953	125/64
8ª	**dó**	**2,00**	**2/1**

Como os intervalos musicais dentro de uma oitava são irregulares, foi criada uma nova escala – A escala temperada. Esta nova escala é constituída de apenas 13 notas por oitava, consecutivas em progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$. Esta é freqüentemente adotada para pianos e órgãos de fole.

Note que não há notas intermediárias entre mi e fá, nem entre si e dó (veja a seguir, a configuração do teclado do piano: as notas intermediárias correspondem às teclas pretas). Estes são os degraus chamados meios-tons ou semitons.

Tabela II.1 Intervalos musicais: a escala temperada.

TOM	f_2/f_1	
dó	**1,000**	**1**
dó # ou ré β	1,0595	$\sqrt[12]{2}$
ré	**1,1225**	$\sqrt[6]{2}$
ré # ou mi β	1,1892	$\sqrt[4]{2}$
mi	**1,2699**	$\sqrt[3]{2}$
fá	**1,3348**	$\sqrt[12]{32}$
fá # ou sol β	1,4142	$\sqrt{2}$
sol	**1,4983**	$\sqrt[12]{128}$
sol # ou lá β	1,5874	$\sqrt[3]{4}$
lá	**1,6818**	$\sqrt[4]{8}$
lá # ou si β	1,7818	$\sqrt[6]{32}$
si	**1,8877**	$\sqrt[12]{2.048}$
dó	**2,000**	**2**

As Consonâncias (*concordantiae*) e Dissonâncias (*discordantiae*).

Um aspecto interessante, ligado a uma *harmônia oculta* entre dois tons, usada desde o século XIII, inclui as consonâncias e dissonâncias. Certos sons, quando são ouvidos simultaneamente, produzem impressão agradável; outros produzem uma sensação desagradável de tensão. Em 1877, **Hermann von Helmholtz**

fundamentou a consonância na estrutura harmônica interna dos dois sons que formam o intervalo musical: quando as fundamentais destes sons estão em uma razão simples, e.g. 3/2, alguns entre os primeiros harmônicos da série (neste caso, 2° e 3°) entram em coincidência, provocando uma agradável sensação de fusão. Quando certos harmônicos estão próximos (mas são diferentes) e provocam batimentos que perturbam a audição, identifica-se uma dissonância.



von Helmholtz (1821-1894).

A Figura 1.13 a seguir mostra uma curva de consonância obtida com dois tons, fixando o primeiro deles em dó e variando o outro continuamente desde o uníssono (1/1) até uma oitava acima (2/1), i.e., o próximo dó.

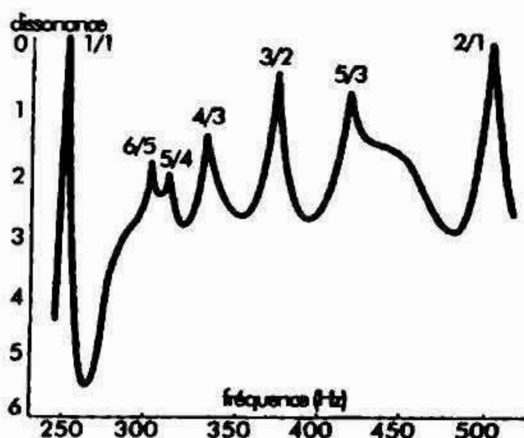


Figura 1.13 Curva de consonância obtida a partir de dois tons contendo seis harmônicos cada. Notar a relação com as notas musicais.

Exercício 2. Verifique que dó e sol estão em consonância, enquanto que dó e si estão em dissonância.

Solução. A razão entre as freqüências de dó e sol é 3/2, alguns entre os primeiros harmônicos da série, neste caso, 2º (sol) e 3º (dó), entram em coincidência (vide curva de consonância). Como a energia é concentrada nos primeiros harmônicos, dó e si, cuja razão de freqüências é 15/8, não apresentam nenhuma coincidência entre os seus harmônicos iniciais.

Classificação das vozes

- Baixo
- Barítono
- Tenor
- Contralto
- Meso-Soprano
- Soprano

Faixas de Mulheres: Soprano, Mezzo-soprano, Contralto.
Faixas de Homens: Alto, Tenor, Baritenor, Barítono, Baixo-barítono, Baixo.

O conteúdo de energia para sinais de voz fica confinado "essencialmente" de 300 Hz a 5 kHz. A telefonia usa voz limitada no espectro entre 300 Hz e 3.300 Hz. A distribuição depende profundamente de várias características do falante (homem/mulher, idade, língua falada etc.).

O Inglês americano apresenta freqüências entre 800 Hz e 3 kHz enquanto que a maior parte do conteúdo de energia de sons de voz produzidos em Francês ocorre em freqüências na faixa de 1 kHz a 2 kHz. Já o Inglês britânico, concentra-se em freqüências particularmente altas (2 a 12 kHz), devido ao número de sons explosivos e ao modo geralmente cortante de falar.

A figura a seguir mostra a localização espectral e o espectro da maior parte da energia da voz emitida por diversos tipos de cantores (e.g.: tenor, barítono, baixo, soprano, etc.).

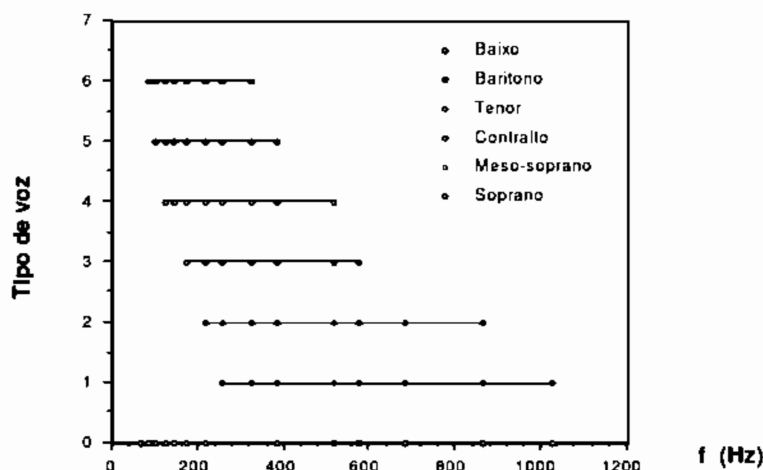


Figura 1.14 Localização espectral da energia (vários tipos de cantores).

INSTRUMENTOS MUSICAIS

O compositor francês **Héctor Berlioz** (1803 – 1869), autor do famoso "Tratado de orquestração", trata de música com propriedade: "*Qualquer corpo sonoro utilizado pelo compositor é um instrumento musical*".

Os instrumentos podem ser ordenados de acordo com diferentes critérios. Um dos mais usados foi proposto pelo filósofo e matemático francês **Marin Mersenne**, em seu ensaio "Harmonia Universal" (1636/37). De acordo com essa classificação, os instrumentos se agrupam, *grosso modo*, em três grandes categorias: cordas, sopros e percussão.

Instrumentos de corda

Instrumentos de cordas dedilhadas:

Alaúde, Bandolim, Violão ou Harpa;

Instrumentos de cordas percutidas:

Cravo ou Piano;

Instrumentos de cordas friccionadas:

Violino, Viola, Violoncelo, Contrabaixo ...

Cordas dedilhadas: *Violão, piano, lira, harpa, cítara, violino em pizicatto, ...*

- **Fundamental** $w_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$

L → comprimento da corda (m)
τ → tensão na corda ($kg.m.s^{-2}$) ou (N)
ρ → densidade da corda (kg/m)

Há efeitos especiais, comuns aos instrumentos de cordas friccionadas:

pizzicato – quando se beliscam as cordas com os dedos sem usar o arco;
com legno – com a madeira do arco, roçando ou batendo;
surdina – espécie de grampo que limita a ressonância, diminuindo a intensidade do som.

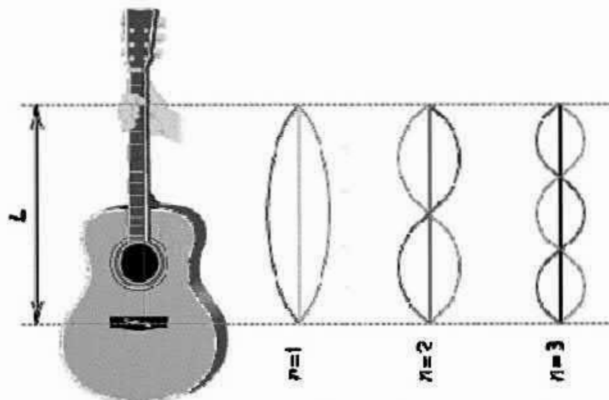


Figura 1.15 Harmônicos de um violão (três primeiros harmônicos).

Para examinar o efeito do diâmetro da corda no som produzido, considere que o material da corda (aço, latão, tripa, nylon...) tem densidade conhecida. Assumindo uma corda cilíndrica, encontra-se facilmente a relação entre a densidade linear δ (kg/m) e a densidade d (kg/m^3), mostrando que a freqüência de ressonância vale:

$$f_0 = \frac{1}{2rL}\sqrt{\frac{T}{\pi d}}\ .$$

O violino, o mais agudo e versátil instrumento de cordas, constitui-se basicamente de 4 cordas, afinadas em quintas (mi4, lá3, ré3 e sol2).

FAMILIA DO VIOLINO

Contrabaixo (baixo)
Violoncelo (tenor)
Viola (contralto)
Violino (soprano)



Figura 1.16 Família do Violino: Instrumentos em escala (comprimentos proporcionais ao tamanho real de cada um deles).

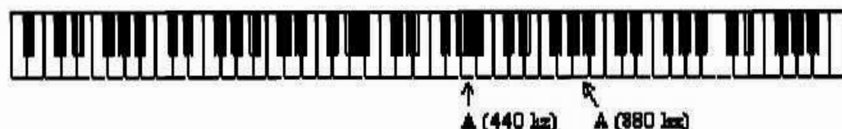


Figura 1.7 Teclado de um piano, mostrando diversas oitavas. Observe o uso da escala temperada. A nota lá é indicada em duas oitavas consecutivas. A mais grave nota do piano tem freqüência 28 Hz, e a mais alta 4.186 Hz.

Afinação: uma nota padrão deve ser definida a fim de se obter as freqüências correspondentes de todas as outras notas musicais, aplicando-se a elas uma razão apropriada. Esta nota é o Lá (A4) acima do Dó (C4) médio, e sua freqüência é de 440 Hz.

APPLETS SOBRE PIANOS E INSTRUMENTOS

- http://www2.ee.ufpe.br/codec/WaveShaper.exe
- http://www.frontiernet.net/~imaging/play_a_piano.html
- http://www.cs.ubc.ca/~kvdoel/bellsJavaSound/bells.html
- http://www.stat.ucla.edu/~dinov/courses_students.dir/04/Spring/Stat233.dir/STAT233_notes.dir/JavaApplet.html
- http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/sound/sound.html
- http://www.jhu.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm

Instrumentos de sopro

Além dos instrumentos de corda, há muitos outros de sopro, baseados em tubos sonoros.

Flauta transversal ou doce, Oboé, Corne inglês, Clarinete, Fagote, Trompete, Saxofone, Trompa, Trombone, Tuba ou Órgão de foles...



Figura 1.18 Ilustração (a) Oboé e (b) Sax tenor.

As freqüências emitidas são harmônicas de uma fundamental dada por

- **Fundamental** $f_0 = \frac{v}{2L}$ (tubos abertos) ou $f_0 = \frac{v}{4L}$ (tubos fechados)

L → comprimento da corda (m)
v → velocidade de propagação do som (m/s) – típico de 340 m/s.

Um tubo de 1 m de comprimento, por exemplo, emite fundamental de 85 Hz e múltiplos dela.

Instrumentos de percussão

São instrumentos basicamente rítmicos. O som é produzido por vibrações transversais numa membrana bidimensional estendida sobre uma cavidade ressoante ou em corpos sólidos.
Triângulo, Prato, Caixa, Conga, Bombo, Pandeiro, Tantã, Agogô; Tímpano, Carrilhão, Xilofone, Celesta, Glockenspiel, Marimba, Vibrafone...

Membranas vibrantes e discos metálicos, típicos de instrumentos de percussão, possuem uma forma de freqüência fundamental que é típica e parecida uma com a outra. Apenas para ilustração, consideram-se membranas esticadas com densidade linear δ (kg/m) e raio R. A freqüência de ressonância neste caso vale:

$$f_0 = \frac{0,382}{R}\sqrt{\frac{T}{\delta}}.$$

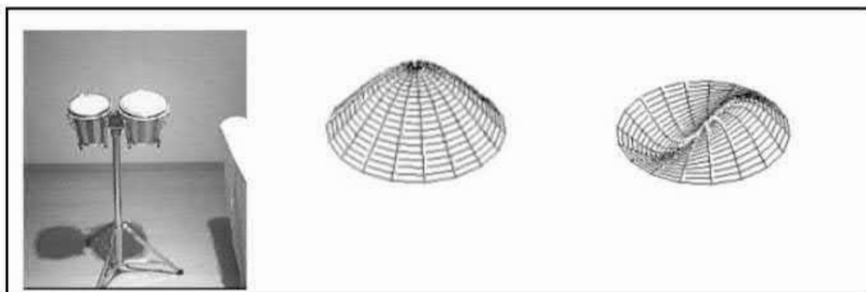


Figura 1.19 Ilustração do movimento de primeiro e segundo harmônico de uma membrana esticada.

Os instrumentos podem ser emulados eletronicamente via sintetizadores. Sons eletrônicos contendo timbres naturais para o violino ou o trompete são de implementação mais difícil devido a estes instrumentos produzirem um número grande de harmônicos. Para acompanhar os avanços em sintetizadores, surgiu uma linguagem de transmissão de dados digital especialmente destinada à música, denominada MIDI (do inglês: *musical instrument digital interface*), que interliga qualquer instrumento musical a um sintetizador por meio de um cabo conector. Deste modo, caso se registre o som de uma tuba no sintetizador, pode-se conectar outro instrumento musical (e.g. um banjo)

e, ao tocá-lo, sairá o timbre musical da tuba. Questões de reconhecimento e classificação são também interessantes [WIE 2001].

A Engenharia Acústica é um ramo da engenharia elétrica que lida com sons e vibrações e tipicamente envolve as seguintes tarefas:

- Gravar e/ou reproduzir sons.
- Sintetizar sons.
- Identificar falantes, verificar integridade de gravações etc.
- Reduzir sons indesejáveis.
- Usar sons (ou ultra-sons) como um indicativo de outra propriedade física (e.g. diagnóstico médico, sonar).

Estereofonia refere-se a um sistema de áudio com dois canais, referindo-se à sua distribuição espacial. É frequentemente binaural, no qual duas trilhas distintas são gravadas (freqüentemente de forma simultânea).

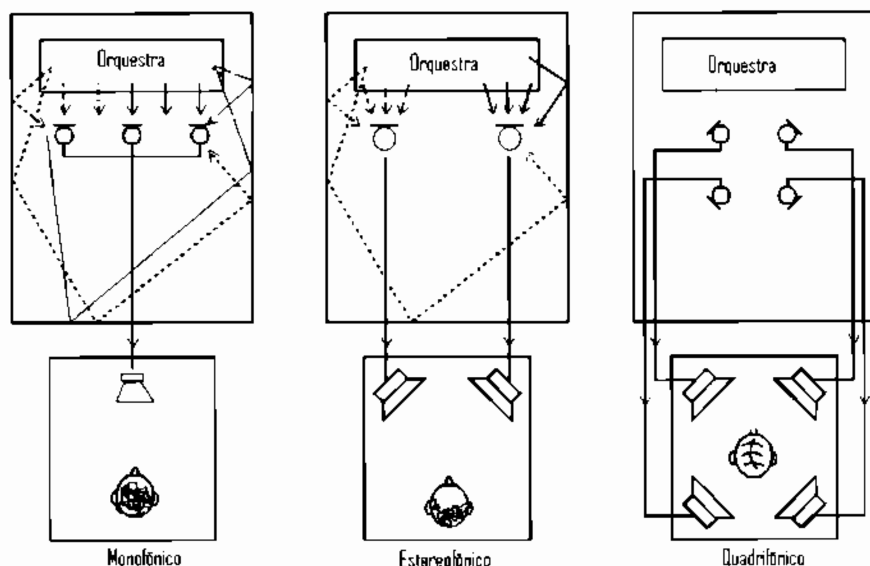


Figura 1.20 Modos de gravação: mono, estéreo e quadrifônico.

Tabela III.1 Tipos de Alto-Falantes.

Tipo de FTE	tamanho	Faixa de freqüências	Características principais
Sub-woofer	12" (34")	20 – 100 Hz	<16 Hz são mais "sentidas" que ouvidas.
Woofer	12" (18")	100 – 500 Hz.	A localização não é crítica, pois são *onidirecional*.
Midrange	5"	500 Hz – 6 kHz	contém a maior parte da energia de de voz ou música.
Tweeter	1"	6 – 20 kHz	responsável pelo "brilho" do som; localização crítica, pois é altamente direcional.

O Professor canadense de música **R. Murray Schafer** conduziu na década de 90, um experimento nos EUA, Canadá, Alemanha e outros países europeus. Pediu a cada estudante de música que ficasse inteiramente relaxado, lembrasse espontaneamente e solfejasse a nota que lhe viesse à mente. A moda para estudantes americanos e canadenses foi *si bemol*, enquanto que para europeus foi *sol*. Comente os resultados desse experimento. Sugestão: Determine a nota associada à freqüência da rede elétrica de baixa tensão.

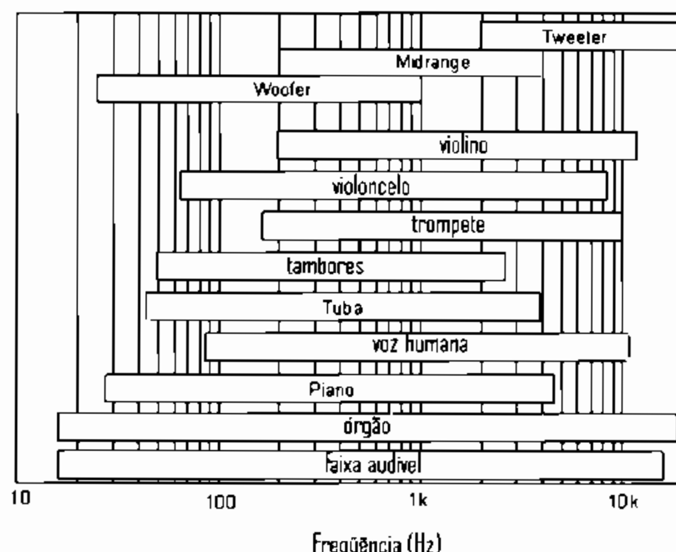


Figura 1.21 Faixa de freqüências relevantes de certos instrumentos musicais: violino, violoncelo, trompete, tambores, tuba, piano e órgão. Alcance típico da resposta de alto-falantes (*tweeter*, *midrange* e *woofer*).

ANÁLISE DE HARMÔNICOS

A propósito do trabalho de Fourier, **Auguste Comte** menciona: <<*Je ne crains pas de prononcer, comme si j'étais à dix siècles d'aujourd'hui que, depuis la théorie de la gravitation, aucune creation mathématique n'a eu plus de valeur que celle-ci, ...*>>

O espectro unilateral consiste no esboço dos valores de c_n e ϕ_n no domínio freqüêncial apenas para valores positivos de w. Assim, para a onda quadrada do exercício 1, tem-se

$$\left|\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases},$$

e o espectro unilateral pode ser esboçado, resultando nos gráficos que se seguem.

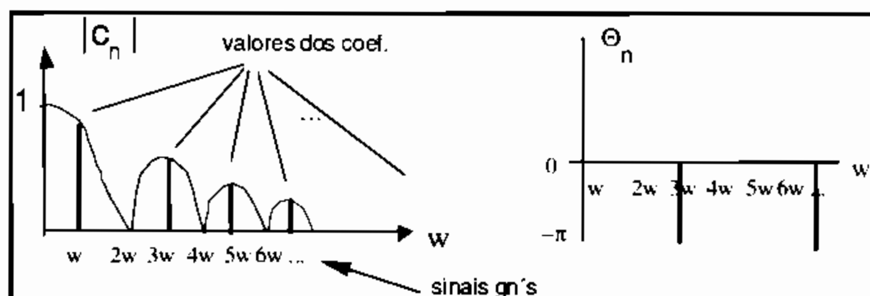


Figura 1.22 Espectro de uma onda quadrada (raias), Magnitude e fase.

As funções periódicas são adequadas para o desenvolvimento em série de Fourier, $f(t)=f(t \pm mT)$, em que T é período. Neste caso, as seguintes propriedades são válidas.

Tabela IV.1 Análise Harmônica de Sinais Reais.

Sinal	Condição	Coeficientes
Par	$f(t) = f(-t)$	$\exists\, a_n \neq 0 : (\forall n)\, b_n = 0$
Impar	$f(t) = -f(-t)$	$(\forall n)\, a_n = 0 : \exists\, b_n \neq 0$
Apenas harmônicos ímpares	$f(t) = -f(t \pm T/2)$	$(\forall k)\ a_{2k} = b_{2k} = 0$
Apenas harmônicos pares	$f(t) = f(t \pm T/2)$	$(\forall k)\ a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$

Dois sinais periódicos com séries trigonométricas de Fourier de formato particularmente interessante têm coeficientes harmônicos decrescendo da forma $1/p^n$, n=1,2,3,...com $p \neq \pm 1$.

$$\frac{p.\cos(2\pi t)-1}{p^2-2p\cos(2\pi t)+1} \cong \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p^n}\cos(2\pi nt) \text{ e}$$

$$\frac{p.sen(2\pi t)}{p^2-2p\cos(2\pi t)+1} \cong \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p^n}sen(2\pi nt).$$

Observe que estes sinais formam um "par conjugado harmônico" (vide transformada de Hilbert). Essas duas famílias de sinais são esboçadas em seguida, variando o valor de p.

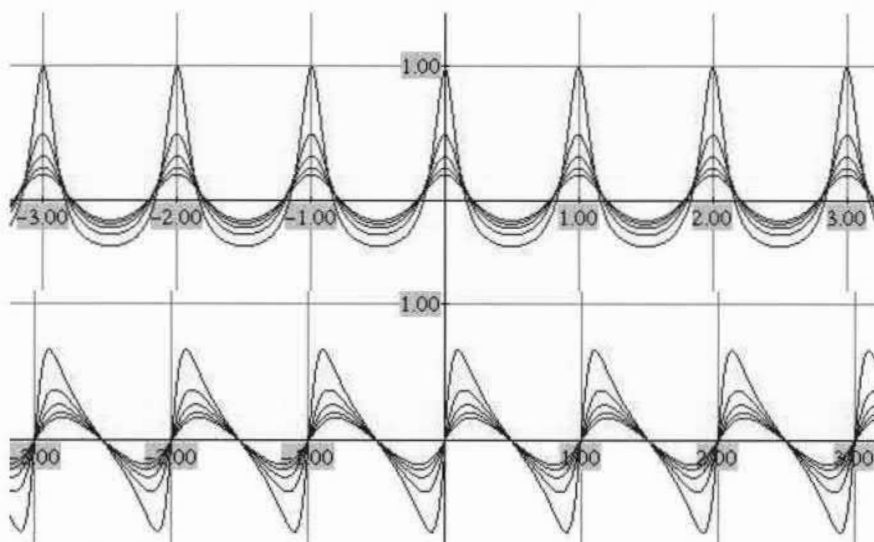


Figura 1.23 Famílias de sinais periódicos com harmônicos de amplitude $1/p^n$, n=1,2,3,... $p \neq \pm 1$.

<u>**Exercício 3**</u>.

a) Uma abordagem alternativa para determinar estas séries de Fourier é baseada em séries de Laurent (**Pierre Laurent**, vide também problema 28). Partindo da série de $\frac{1}{1-z}$, $|z| \neq 1$,

considere $z := \frac{1}{p}\exp(j2\pi t)$, $p \neq \pm 1$, separe as partes real e parte imaginária, provando as expressões mostradas.

b) Verifique a convergência da série em t=0, obtendo o valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$.

c) Mostre que a energia E de cada desses sinais vale $E = \frac{1}{2(p-1)(p+1)} < +\infty$.

Exercício 4. Mostre que o sinal periódico $f(t) := -\ln\left(2sen\,|\frac{t}{2}|\right)$ tem série trigonométrica de Fourier $f(t) \cong \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n}$ [GAS&WIT 2000].

Solução.

Claramente, o período é $T=2\pi$ e $(\forall n)$ b_n=0 e a_0=0. Resta determinar

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\ln\left(2\,\text{sen}\left|\frac{t}{2}\right|\right).\cos nt dt = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\,\text{sen}\left|\frac{t}{2}\right|\right).\cos nt dt\ .$$

Pondo $u = \ln\left(2\,\text{sen}\frac{t}{2}\right)$ e $dv = \cos nt dt$ e integrando por partes, vem:

$$a_n = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\, nt}{n} . \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}} dt\ .$$

Assim, $a_n = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{\pi} \cot g\frac{t}{2}.\text{sen}\, nt dt =: \frac{1}{n\pi} I_n$. Tem-se $I_1 = 2\int_0^{\pi} \cos^2\frac{t}{2} dt = \pi$.

Por outro lado, é fácil mostrar que $I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi} (\cos(1-n)t + \cos nt)dt = 0$ para $\forall n \geq 2$ e $I_1 = I_2 = I_3 = ...$

APPLETS SOBRE SÉRIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA

- http://www.falstad.com/fourier/
- http://www.indiana.edu/~acoustic/s522/fourapdkp.html
- http://links.math.rpi.edu/applets/appindex/fourier-series-trog.html
- http://homepages.gac.edu/~huber/fourier/index.html

Séries de Legendre-Fourier.

Outros conjuntos ortogonais podem ser usados na decomposição. Os polinômios ultra-esféricos (com α=0) de Legendre verificam a relação recursiva[8]:

$$(n+1)P_{n+1}(t)-(2n+1)tP_n(t)+nP_{n-1}(t)=0\,,\ \text{com } P_0(t)=1 \text{ e } P_1(t)=t.$$

Estes polinômios são ortogonais em $-1<t<1$, de acordo com

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt=\frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}.$$

Um sinal $f(t)$, $|t|<1$, pode ser decomposto em série usando o conjunto ortogonal completo $\{P_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$:

$$f(t)\cong\sum_{n=0}^{+\infty}c_nP_n(t),\ \text{com } c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)P_n(t)dt.$$

No caso de sinais polinomiais, a decomposição em série de Legendre-Fourier é bem mais ingênua, como por exemplo: $f(t)=10t^3+3t^2+7t-9$ em $|t|<1$. A decomposição é finita e o erro na representação é nulo.

$$f(t)=4P_3(t)+2P_2(t)+13P_1(t)-8P_0(t).$$

Ao invés de efetuar as integrais para calcular os coeficientes de Legendre-Fourier, considere o seguinte algoritmo:

---

[8] **Adrien-Marie Legendre** (1752-1833).

$P_0(t)=1$ $P_1(t)=t$ $P_2(t)=(3t^2-1)/2$ $P_3(t)=(5t^3-3t)/2$ etc.

$f(t)=10t^3+3t^2+7t-9$
$4P_3(t)=10t^3 \quad -6t$
resta $3t^2+13t-9$
$2P_2(t)=3t^2 \quad -1$
resta $13t-8$
$13P_1(t)=13t$
resta -8
$-8P_0(t)=-8$

Séries Trigonométricas de Hartley

Mostra-se facilmente que todo sinal periódico (período T) que admite série trigonométrica de Fourier convergente, também admite uma representação alternativa, chamada série de Hartley (vide adiante nota sobre **Ralph Hartley**), em termos dos núcleos *cas*(.) cosseno-mais-seno [BRA 1978], [BRA 1983].

O núcleo cassoidal de Hartley é definido por $cas(x):=\cos(x)+\text{sen}(x)$ e o conjunto ortogonal completo usado na decomposição é $\left\{cas(n\frac{2\pi}{T}t)\right\}_{n=0}^{+\infty}$, equivalente ao conjunto trigonométrico de Fourier $\left\{\cos(n\frac{2\pi}{T}t), \text{sen}(n\frac{2\pi}{T}t)\right\}_{n=0}^{+\infty}$.

A série é expressa sob a forma: $f(t)\cong\sum_{n=0}^{+\infty}\overset{\circ}{c}_n cas\left(nw_0t+\overset{\circ}{\theta}_n\right)$. Mostra-se que a relação entre esses coeficientes de Hartley e os coeficientes da série trigonométrica é dada via:

$$\overset{\circ}{c}_n=\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2}{2}} \text{ e } \overset{\circ}{\theta}_n=\frac{\pi}{4}+tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

1.5 A REPRESENTAÇÃO EXPONENCIAL

A representação exponencial da série de Fourier é a mais utilizada e é equivalente a série trigonométrica para sinais reais. Entretanto, ela pode também ser aplicada a sinais complexos e, portanto, é mais geral.

Considera-se no desenvolvimento, um produto interno Hermitiano para funções complexas expresso por

$$< \phi_i(t), \phi_k(t) > = \int_a^b \phi_i(t).\phi_k^*(t)dt \quad \text{, em } a<t<b.$$

A ortogonalidade de funções complexas implica na relação

$$\int_a^b \phi_i(t).\phi_k^*(t)dt = k_i \delta_{i,k} \, .$$

Para um sinal $f(t)$, $t_o<t<t_o+T$, $w_o=2\pi/T$, podem ser escolhidas funções exponenciais complexas para a expansão em série (um conjunto completo para sinais complexos na janela T).

$$\{\phi_n(t)\} = \{e^{jnw_0t}\}_{n=-\infty}^{+\infty} \, , \quad \text{em que } j = \sqrt{-1} \, .$$

A ortogonalidade entre pares de funções é facilmente verificada:

$$< e^{jnw_0t}, e^{jmw_0t} >= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)w_0t} dt = \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se n} \neq \text{m.} \end{cases}$$

A Série de Fourier pode imediatamente ser escrita sob a forma

$$f(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0t} \, , \quad t_0<t<t_0+T,$$

$$\text{com} \quad F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jnw_0t} dt \qquad n = 0\, , \pm 1, \pm 2\, , \ldots \, .$$

Os coeficientes de Fourier F_n podem ser números complexos e estão relacionados com os coeficientes trigonométricos por o que pode ser prontamente verificado pelo leitor.

Das relações acima se conclui imediatamente que:

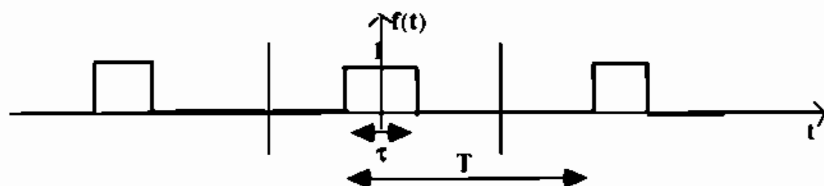
- Se $f(t)$ for par $F_n = F_{-n} = a_n / 2$ e os coeficientes são reais;
- Se $f(t)$ for ímpar $F_n = F_{-n} = -jb_n / 2$ e os coeficiente são imaginários.

APPLET SOBRE SÉRIE DE FOURIER EXPONENCIAL

http://www.valdosta.edu/~cbarnbau/math_demos_folder/FT/sawtooth.htm#

Exercício 5

Encontrar o desenvolvimento exponencial da série de Fourier para um trem de pulsos com ciclo de trabalho $d = \tau/T$, esboçado a seguir.



Solução:

Assumindo uma fundamental $w_0=2\pi/T$, tem-se:

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jnw_0 t}dt \quad = d.Sa(n\pi d), \quad n=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

e portanto
$$f(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} dSa(n\pi d).e^{jnw_0 t}, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Uma outra representação conhecida como *espectro bilateral* de um sinal pode ser obtida a partir de sua série exponencial. Se F_n é complexo, são necessários os gráficos de $|F_n|$ e $\angle F_n$. Para o sinal do exercício acima, F_n é real e o espectro de amplitude e fase pode ser condensado.

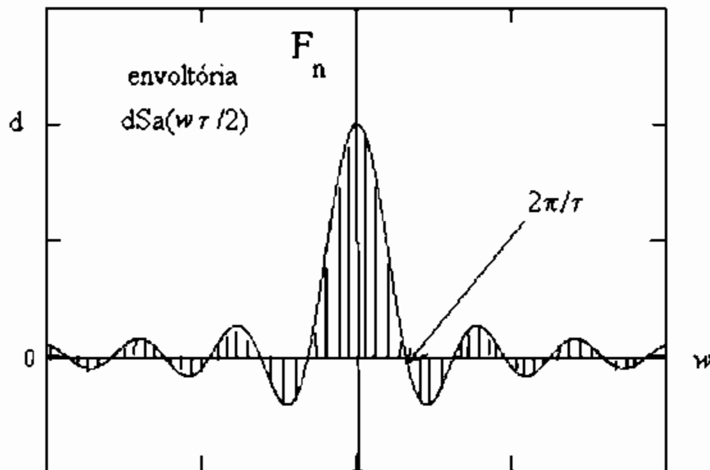


Figura 1.24 Espectro bilateral de um trem de pulsos: passagem do discreto ao contínuo.

O número de linhas espectrais antes de freqüência $B=1/\tau$ Hz (correspondente ao primeiro zero da envoltória, $w=2\pi/\tau$) é $\lfloor T/\tau \rfloor$, na qual a função *floor* $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor que x.

O espaçamento entre raias consecutivas é sempre $w_0=2\pi/T$ rd/s. ■

As séries de Fourier são por demais conhecidas como método para abordar sinais periódicos "bem comportados", tipo onda quadrada, rampas periódicas, dentes de serra, senoidais retificadas etc. Surpreendentemente, a ferramenta também é adequada para sintetizar ou analisar sinais periódicos "mais estranhos" (vide figura que se segue).

Seja

$$MH(t,s) := \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{Zeta(s)\cdot k^{s}} \cdot \cos\left(Zeta(s)\, k^{s}\cdot t\right)$$

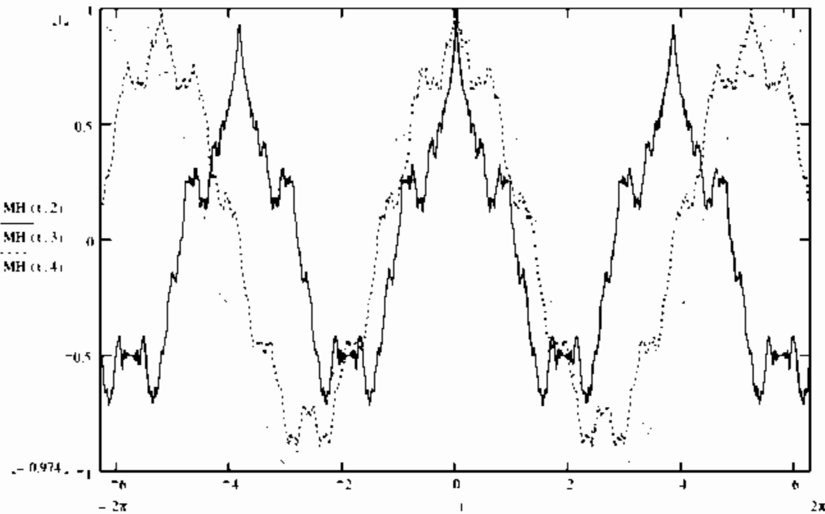


Figura 1.25 Sinais contínuos periódicos com série de Fourier bem definida. As séries são expressas por MH(*t*,*s*), em que Zeta(s) é a função ζ de Riemman.

A série de Fourier exponencial bidimensional para com o sinal $f(x,y)$ desenvolvido em uma janela $x_O<x<x_O+H$, $y_O<y<y_O+V$, com freqüências fundamentais (na horizontal e na vertical) $w_{ox}:=2\pi/H$ e $w_{oy}:=2\pi/V$, é expressa por

$$f(x,y) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{n,m} e^{jnw_{0x}x + jmw_{0y}y}$$

com coeficiente $$F_{n,m} = \frac{1}{HV} \iint f(x,y)\, e^{-(jnw_{0x}x + jmw_{0y}y)}\, dx\, dy$$

A iluminação (sinal de luminância) de uma cena é dada por $I(x,y)$, desenvolvido numa janela retangular $x_O<x<x_O+H$, $y_O<y<y_O+V$. O sinal normalmente é parametrizado no tempo, t, através das velocidades de varredura s, $x=s_h t$ e $y=s_v t$.

Assim, $v(t)=I(s_h t,\ s_v t)=I(x,y)$. Considerando a expressão da série bidimensional (exponencial) de Fourier, tem-se:

$$v(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{n,m} e^{jnw_{0x}S_h t + jmw_{0y}S_v t}.$$

A expansão em série 2-D avaliada fora da janela, tal como em 1-D, comporta-se como periódica. Imagine um único plano infinito (parede infinita) onde são reproduzidas telas (janelas) de um número infinito de imagens idênticas!

Uma imagem estática é um sinal duplamente periódico, contendo harmônicos das freqüências de linha (*H*) e das freqüências de quadro (*V*), somas e diferenças. Desde que usualmente $w_{0h} >> w_{0v}$ e $|F_{n,m}|$ decresce rapidamente com o produto *n.m*, as linhas espectrais vão se agrupar em torno de harmônicos de f_{0h}, com largas "lacunas" entre os aglomerados. No caso de imagem em movimento, as linhas espectrais convergem em "amontoados" contínuos, mantendo, porém os espaços vazios. Este fato permitiu, posteriormente, a inclusão do sinal de crominância (TV colorida)[9] sem aumentar a faixa de freqüências usada (banda passante), mantendo requisitos de compatibilidade entre a transmissão colorida e monocromática [CARL 1981].



Figura 1.26 Espectro típico de um sinal de vídeo (TV - preto e branco): Aglomeramentos em torno de harmônicos da freqüência do horizontal.

APPLETS SOBRE IMAGENS & 2D-ESPECTROS

- http://www.seeingwithsound.com/javoice.htm
- http://www.s2.chalmers.se/research/image/Java/applets_list.htm
- http://www.jcrystal.com/steffenweber/JAVA/jfourier/jfourier.html

CONVERGÊNCIA PONTUAL

Se o sinal *f*(*t*) é integrável e absolutamente integrável, então os coeficientes de Fourier estão bem definidos[10]:

---

[9] O engenheiro de telecomunicações **Georges Valensi** (ITT, Paris) concebeu a idéia fundamental na transmissão colorida, pondo a informação nos interstícios do espectro do sinal de vídeo.

[10] os coeficientes estão bem definidos, embora a série possa não convergir.

$$|a_n| = \frac{2}{T}\left|\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(nw_0t)\,dt\right| \le \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\cdot dt < +\infty,$$

$$|b_n| = \frac{2}{T}\left|\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}(nw_0t)\,dt\right| \le \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\cdot dt < +\infty.$$

A definição dos coeficientes de Fourier e a forma com que se aproximam de zero quando N cresce, depende do comportamento do sinal (vide lista de exercícios). Resumidamente,

1. $f \in L^1$ então $|a_n|,|b_n|<+\infty$.
2. $f, f' \in L^1$ então $|a_n|,|b_n|<\frac{K}{n}$.
3. $f, f', f'' \in L^1$ então $|a_n|,|b_n|<\frac{K}{n^2}$.

Com relação à convergência pontual da série de Fourier, as questões são bem mais complicadas. As dificuldades surgiram com exemplos de **du Bois-Reymond** (1831-1889). Posteriormente, o brilhante **Andrey N. Kolmogorov** (1903-1987) mostrou a existência de funções integráveis para as quais a série de Fourier *diverge em um conjunto denso de pontos*. Entretanto, estes problemas praticamente não aparecem nas classes de sinais físicos.

Seja $f_N(t)$ a série de Fourier truncada: $f_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{jnw_0t}$, $t_0 < t < t_0 + T$, $w_0 = 2\pi/T$.

De que modo $f_N(t)$ tende a $f(t)$ quando N aumenta? É verdade que $\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)$? Isso é verdade para todo t?

Convergência de funções:

1. Em média quadrática
2. Convergência pontual
3. Convergência uniforme

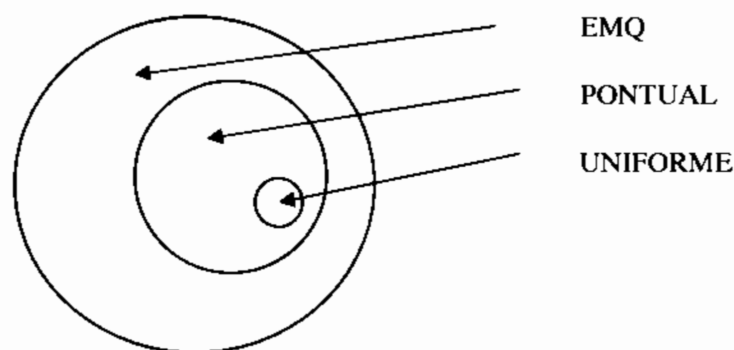


Figura 1.27 Diagrama de Convergência. Relações de inclusão entre as diferentes formas de convergência.

A relação entre esses critérios é ilustrada na figura precedente (por exemplo, se f_N converge uniformemente, então também converge pontualmente...etc.)

PROBLEMAS DE CONVERGÊNCIA (Núcleos e Janelas)

Uma das maiores dificuldades da aceitação das séries de Fourier decorria do fato de que a análise da época estava praticamente restrita às funções que admitem séries de Taylor (ditas analíticas). Este não é o caso das funções periódicas com descontinuidades, típicas da análise de Fourier.

K. Weierstrass (1815-1897) propõe uma função contínua p.p., mas que não admite derivada em nenhum ponto! Estas funções deixaram os contemporâneos estupefatos e freqüentemente indignados[11] (termos de **Y. Meyer**) – e ainda deixa a muitos assim. Trata-se de sinais com comportamento auto-similar, conhecidos agora como fractais (vide teoria de [MAND 1995], [ARGO *et al.* 1989]).

[11] Fujo com horror desta plêiade de funções contínuas não deriváveis em nenhum ponto (**C. Hermite**) 1893.

Funções periódicas de Weierstrass podem ser definidas por séries do tipo:

$$W_2(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \cos\left(2^k t\right) \text{ e } W_3(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \cos\left(3^k t\right).$$

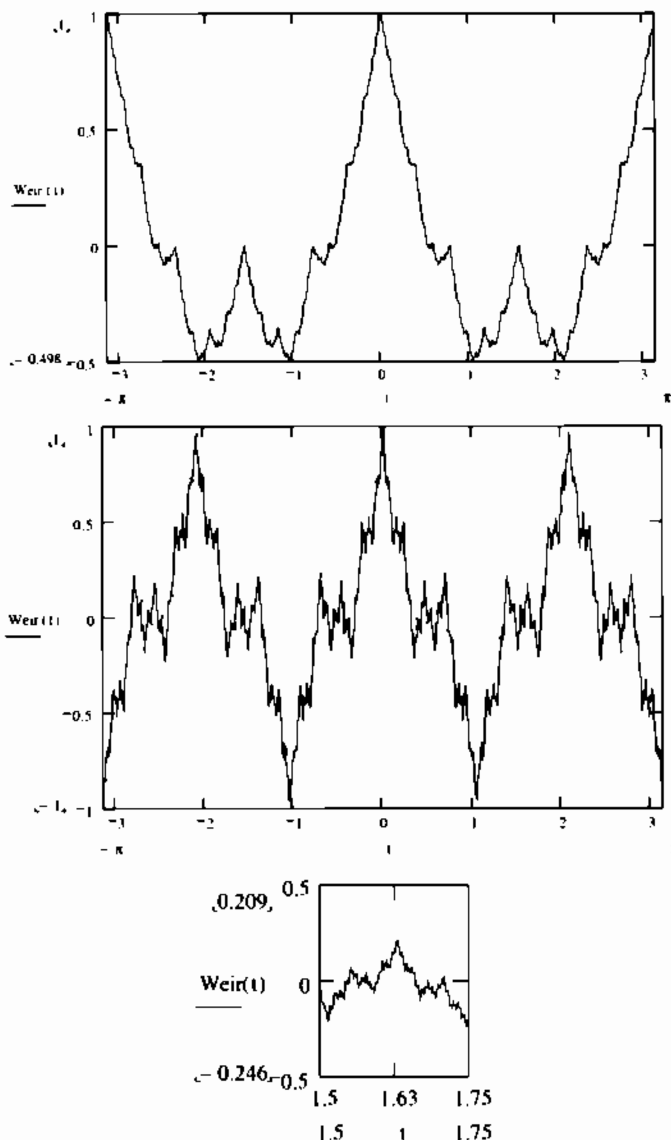


Figura 1.28 Ilustração da função de Weierstrass, contínua p.p., porém sem derivadas em nenhum ponto.

A versão truncada da série exponencial de Fourier está obviamente relacionada com a função $f(t)$ que ela representa. Qual a relação explícita entre $f_N(t)$ e $f(t)$? Isto é necessário para avaliar "quão boa" é a representação. Note que a relação se exprime unicamente através dos coeficientes de Fourier, pois os demais termos dependem apenas da fundamental. A série truncada $f_N(t)$ pode ser escrita como

$$f_N(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-T/2}^{T/2} f(t')e^{jnw_0(t-t')}dt' = \int_{-T/2}^{T/2} f(t')\frac{1}{T}\sum_{-N}^{N} e^{jnw_0(t-t')}dt'$$

Digressão: Os polinômios trigonométricos de Dirichlet de grau N.

$$D_N(x) := \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{jnx}.$$

Claramente, pela fórmula de Euler, $D_N(x) := \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=0}^{N}\cos(nx)$.

Efetuando-se a soma, mostra-se (exercícios) que

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\frac{\text{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Assim,

$$f_N(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t')D_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-t')\right)dt'.$$

Essa é a relação entre a série truncada e o sinal original. O sinal é observado através de uma "janela" de Dirichlet $D_N(.)$, como se visto através de um filtro linear.

A operação acima é uma convolução e pode ser mostrado por mudança de variável que é comutativa:

$$f_N(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t-t')D_N\left(\frac{2\pi}{T}t'\right)dt'.$$

Há relações interessantes estudando o comportamento dos núcleos de Dirichlet. Os exercícios ilustram que a seqüência tende a um pente de Dirac à medida que N cresce sem limites (examinado mais tarde, quando tratando de funções generalizadas). Vale também comparar a série de Fourier de um trem de impulsos (pente) com a expressão de $D_N(t)$ assumindo $N \to \infty$. Assim, no intervalo de integração,

$$\lim_{N\to\infty} D_N(x) \to \delta(x), \quad |x|<\pi.$$

Será visto que a identidade do produto de convolução é exatamente o delta de Dirac (transformada de Fourier do sinal identidade $f(t)=1$ para o produto convencional de sinais), ou seja, $f(t)*\delta(t)=f(t)$, o núcleo de Dirac passa a reproduzir $f(t)$. Esta interpretação pode ser mais bem apreciada após revisar a teoria das funções generalizadas de **Laurent Schwartz**.

Desta forma, $f_N \to f$.

As propriedades de convergência da série de Fourier são sempre estudadas em termos do comportamento dos núcleos de Dirichlet. Em particular, para a análise da convergência pontual, o resultado central (vide [RUD 1971]) mostra que as propriedades de convergência da série são, *de facto*, pontuais. A convergência da série em um ponto depende apenas de uma vizinhança arbitrariamente pequena no entorno desse ponto.

TEOREMA DA LOCALIZAÇÃO.

As propriedade de convergência pontual da série de Fourier dependem essencialmente da vizinhança do ponto; para $f \in L^2$, Dado $0<\delta<T/2$, podendo ser arbitrariamente pequeno, então

$$\lim_{N \to \infty} \left(\int_{T/2}^{-\delta} + \int_{\delta}^{T/2} \right) f(t-t') D_N\left(\frac{2\pi}{T} t'\right) dt' = 0 . \blacksquare$$

<u>Prova</u>.
Fixe t (ponto a analisar a convergência) e seja

$$h(t') := \begin{cases} 0 & |t'| < \delta \\ \dfrac{f(t-t')}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t'}{T}\right)} & \delta \le |t'| \le T/2 \end{cases}$$

Então

$$\int^{-\delta} \int_{\delta} f(t-t') D_N\left(\frac{2\pi}{T} t'\right) dt' = \int_{-T/2}^{T/2} h(t') \operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi t'}{T}\right) dt' .$$

Desenvolvendo a soma de arcos,

$$h(t')\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{t'}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}Nt'\right) + h(t')\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{t'}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}Nt'\right).$$

Ambas as funções $h_1(t') := h(t').\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{t'}{2}\right)$ e $h_2(t') := h(t').\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{t'}{2}\right)$ são L^1 (integráveis e absolutamente integráveis). Isso decorre da integrabilidade de $f(t)$, pois

$|h_i(t')| \leq |h(t')| \leq \frac{|f(t-t')|}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T}\delta\right)}$. Então

$$\int^{-\delta} \int_{\delta} f(t-t')D_N\left(\frac{2\pi}{T}t'\right)dt' = \int_{-T/2}^{T/2} h_1(t')sen\left(N\frac{2\pi}{T}t'\right)dt' +$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2} h_2(t')\cos\left(N\frac{2\pi}{T}t'\right)dt'.$$

Estes termos são proporcionais aos coeficientes de Fourier b_N a a_N para sinais diferentes (para h_1 e h_2, respectivamente; o lema de Riemann-Lebesgue assegura o fato). Como $\lim_{N\to\infty} |a_N|=0$ e $\lim_{N\to\infty} |b_N|=0$, o resultado segue. **Q.E.D.**



Andrey Kolmogorov (1903-1987).



Ulisse Dini (1845-1918).

Para garantir a convergência pontual da série, foram propostos diferentes critérios (condições de suficiência, porém não de necessidade). De qualquer forma, obedecida às condições estabelecidas, a convergência pontual é garantida. Há essencialmente dois critérios "maiores" para verificar a convergência pontual: o critério de Jordan ou o critério de **Ulisse Dini** (1845-1918) [FIGU 1977]. Ao invés da utilização destes, é possível empregar condições menos gerais que correspondem às proposições a seguir, resultados obtidos dos critérios de Jordan e Dini, respectivamente:

<u>Proposição 1</u>. (Critério de Dirichlet, *circa* 1830)

Se $f(t)$ é limitada e tem um número finito de máximos e mínimos locais, bem como um número finito de pontos de descontinuidade (as conhecidas *condições de Dirichlet*), então:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = a_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nw_0 t + b_n \operatorname{sen} nw_0 t. \quad \blacksquare$$



Gustav Dirichlet (1805-1859).

<u>Proposição 2.</u> (Teorema de Fourier)

Se $f(t)$ é uma função seccionalmente diferenciável, então vale o resultado da proposição anterior. $\blacksquare$

Assim, praticamente a totalidade dos sinais físicos manipulados apresenta propriedades de convergência pontual. Uma formulação alternativa para as janelas de Dirichlet pode ser considerada. Para N inteiro, sejam polinômios de grau N definidos por:

$$P_N(x) := \prod_{n=1}^{N} \left(x - \cos(nx_0)\right), \ |x|<1, \text{ com } x_0 := \frac{2\pi}{N + \frac{1}{2}}.$$

Os primeiros polinômios desta família estão tabelados e esboçados para alguns valores de N.

Tabela V.1. Polinômios associados de Dirichlet, |x|<1: $P_N(x)$ associado à $D_N(x)$.

N	$P_N(x)$
1	$x+\frac{1}{2}$
2	$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$
3	$x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$
4	$x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$

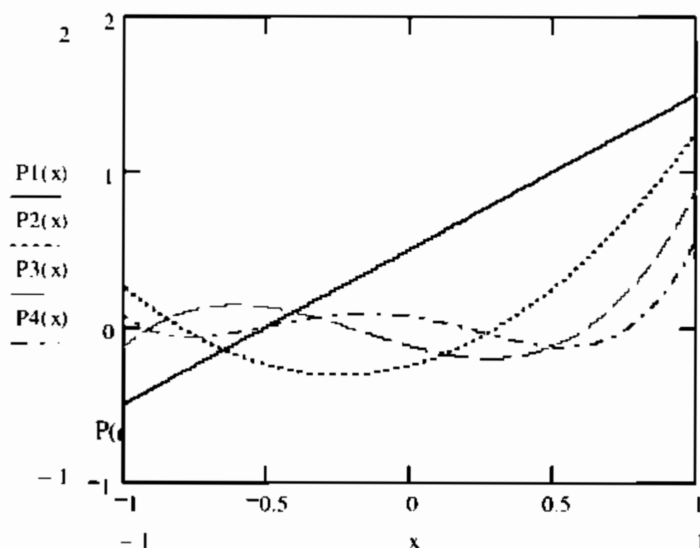


Figura 1.29 Polinômios associados de Dirichlet $P_N(x)$;diversas ordens.

Fórmula de 'de Oliveira' para os polinômios de Dirichlet:

$$TD_N(x) = 2^N \prod_{n=1}^{N}\left[\cos(x)-\cos(nx_0)\right],\ |x|<\pi$$

de modo que $D_N(x)=\frac{2^N}{T}.P_N(\cos(x))$. Os $2N$ zeros de $D_N(x)$ no intervalo $|x|<\pi$ ocorrem, portanto, nos pontos $x_n=\pm n\frac{2\pi}{N+\frac{1}{2}}$.

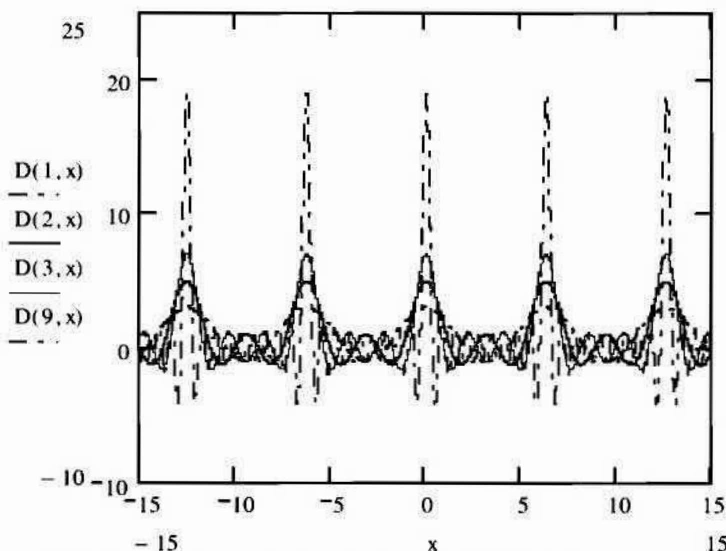


Figura 1.30 Comportamento dos Núcleos de Dirichlet $D_N(x)$ para alguns valores particulares de N.

N.B. Segundo a teoria das distribuições (seção 1.5), tem-se que $\lim_{N \to +\infty} D_N(t) = \delta(\text{sen}(t/2))$, um pente de Dirac.

ENTENDENDO O FENÔMENO DE GIBBS



Josiah Gibbs (1839-1903).
Mais conhecido por seus trabalhos em Termodinâmica.

A análise aqui tende a seguir os preceitos de **R.W. Hamming**: "However, we will avoid becoming too involved with mathematical rigor, which all too often tends to become *rigor mortis*."

O truncamento da série de Fourier para um sinal $f(t)$ periódico produz um efeito interessante em torno de uma descontinuidade, analisado por Gibbs (1899). Inicialmente, este fenômeno pôs sérios limites na confiabilidade das previsões de marés estabelecidas no século XIX, e ainda hoje é responsável por artefatos em imagens médicas. Sem perda de generalidade (para simplificar), suponha que há uma única descontinuidade na origem. Separando a parte contínua de $f(t)$, denotada por $f_c(t)$, tem-se

$$f(t) = f_c(t) + [f(0+) - f(0-)]u(t). \qquad (*)$$

Note que $f(0+)$-$f(0-)$ representa o salto, que só ocorre a partir de t=0.

Claro que $f_c(0-)=f(0-)$ e de modo que $f(0) = \dfrac{f(0+) + f(0-)}{2}$, como esperado, assumindo $u(0)=1/2$.

Usando a janela de Dirichlet,

$$f_N(t) = \int_0^T f(t-\tau) D_N\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau. \qquad (**)$$

Substituindo-se a expressão (*) em (**), tem-se:

$$f_N(t) = \int_0^T f_c(t-\tau) D_N\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau + [f(0+) - f(0-)] \int_0^T D_N\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) u(t-\tau) d\tau.$$

No limite $N \to +\infty$, a primeira integral reproduz a parte contínua de $f(t)$, i.e.,

$$\int_0^T f_c(t-\tau) D_N\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau = f_c(t).$$

Resta estudar o comportamento do termo

$$\Delta := \lim_{N \to +\infty} [f(0+) - f(0-)] \int_0^t D_N\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) d\tau.$$

Com a mudança de variável $x = \frac{2\pi}{T}\tau$,

$$\Delta = \lim_{N \to +\infty} \left[f(0+) - f(0-)\right]\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi/T} D_N(x)dx.$$

Em uma vizinhança da origem, x=0, $|x|<\delta$, arbitrariamente pequena, tem-se:

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\frac{x}{sen(x/2)}.\frac{sen\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{x} = \frac{2}{T}\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{Sa\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{Sa(x/2)}$$

de modo que com uma aproximação suficientemente boa,

$$D_N(x) \cong \frac{2}{T}.(N+\frac{1}{2}).Sa\left((N+\frac{1}{2})x\right).$$

Segue-se com $\zeta = (N+\frac{1}{2})x$, que

$$\Delta = \left[f(0+) - f(0-)\right]\frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi(N)}\frac{sen(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

em que $\varphi(N) = \frac{2\pi}{T}\left(N+\frac{1}{2}\right)t$.

A integral acima não é determinada de forma fechada (não admite primitiva) e é chamada de **Integral seno**, denotada por

$$Si(x) := \int_0^x Sa(\zeta)d\zeta.$$

Os valores da *Integral Seno* encontram-se em tabelas[12] (tal como a integral correspondente a uma Gaussiana), sendo os gráficos da função $Si(x)$ e uma aproximação linear $\tilde{S}i(x)$ esboçados na figura a seguir.

---

[12] Assintoticamente $Si(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{sen x}{x}\left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \ldots\right) - \frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \ldots\right)$. [SPI 1979]. $Si(0)=0$ e $Si(\infty)=\pi/2$.

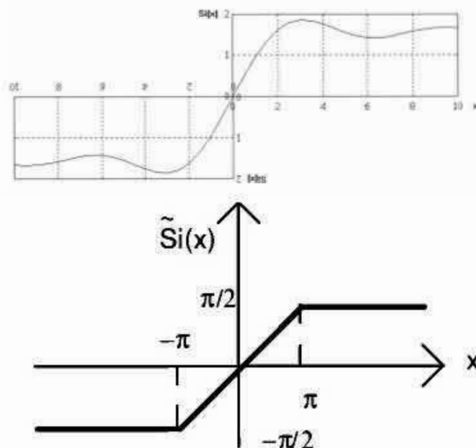


Figura 1.31 Função Integral Seno e sua aproximação linear.

$$\Delta = [f(0+) - f(0-)]\frac{1}{\pi} Si(\varphi(N)).$$

No limite,

$$\lim_{N \to \infty} \Delta = [f(0+) - f(0-)]\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Sa(\zeta)d\zeta = [f(0+) - f(0-)]\frac{1}{\pi} Si(\infty).$$

Em t=0, portanto, tem-se

$$\lim_{N \to \infty} f_N(0) = f(0-) + [f(0+) - f(0-)]\frac{1}{2} = \frac{[f(0+) + f(0-)]}{2},$$

como seria de se esperar. No entanto...

Para N finito, mesmo grande, os valores de t em torno da origem incluem $t^* := \left(\frac{T/2}{N+1/2}\right)$ (possivelmente muito pequeno, pois T é fixo e N aumenta), o qual resulta em $Si(\pi)$. O máximo salto, para a função $Si(x)$ ocorre com um valor acima de $\pi/2$, como ilustrado no gráfico 1.31.

Assim, para qualquer N finito, o salto na descontinuidade inclui o intervalo 1,089 $[f(0+)-f(0-)]$. Para N finito, há sempre um valor de tal que ocorre uma oscilação (*overshoot*) cerca de 9%. Para uma descontinuidade simples no ponto t, o intervalo de Gibbs é $\left(t - \frac{T/2}{N+1/2}, t + \frac{T/2}{N+1/2}\right)$,

cada vez menor a medida que N cresce, resultando em um fenômeno pontual numa vizinhança da descontinuidade. Para resultados mais recentes, envolvendo wavelets, vide [KELL 1996], [SHI&VOL 1996].

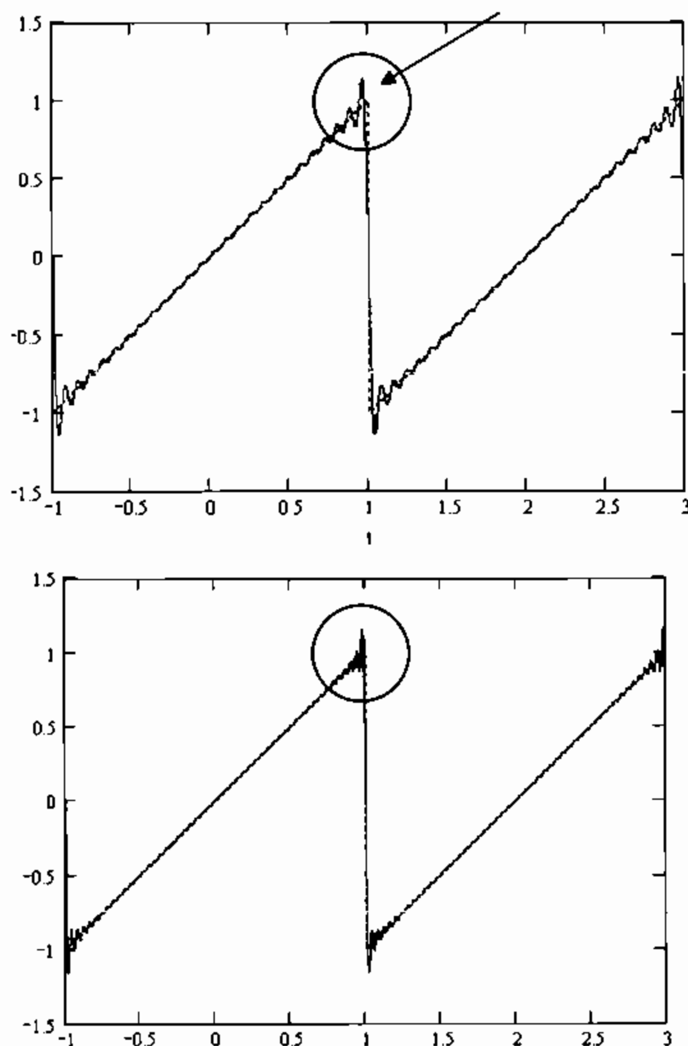


Figura 1.32 Ilustrando o fenômeno de Gibbs (série truncada com 25 e 50 harmônicos).

Série de Fourier com fator de convergência de Lanczos.

Seja $f(t)$, $t_0<t<t_0+T$, um sinal possivelmente descontínuo, com série de Fourier exponencial truncada $f_N(t)$, contendo N harmônicos. O fenômeno de Gibbs numa descontinuidade t ocorre essencialmente no intervalo $\left(t-\frac{T/2}{N+\frac{1}{2}}, t+\frac{T/2}{N+\frac{1}{2}}\right)$, o qual tem amplitude $\frac{T}{N+\frac{1}{2}}$.

Visando melhorar o comportamento da convergência da série truncada, Lanczos propôs considerar a versão suavizada (série "suavizada") definida por:

$$\tilde{f}_N(t) := \frac{N+\frac{1}{2}}{T}\int_{t-\frac{T/2}{N+\frac{1}{2}}}^{t+\frac{T/2}{N+\frac{1}{2}}} f_N(t')dt' \quad \forall t\in(t_0,t_0+T).$$


Cornelius **Lanczos (1893-1974).**

Essa representação conduz a uma janela de Lanczos $L_N(x)$, tal que:

$$\tilde{f}_N(t) = \int_0^T f(\tau)L_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau.$$

Uma expressão para $L_N(.)$, similar aquela da janela de Dirichlet, corresponde a:

$$L_N(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} Sa\left(\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}\right)e^{jnx}.$$

O fenômeno de Gibbs é fortemente atenuado em todas as descontinuidades pela inclusão desses *tapers* (detalhes na Tabela VI.1), fato ilustrado na figura a seguir. Detalhes podem ser encontrados em [HAMM 1986].

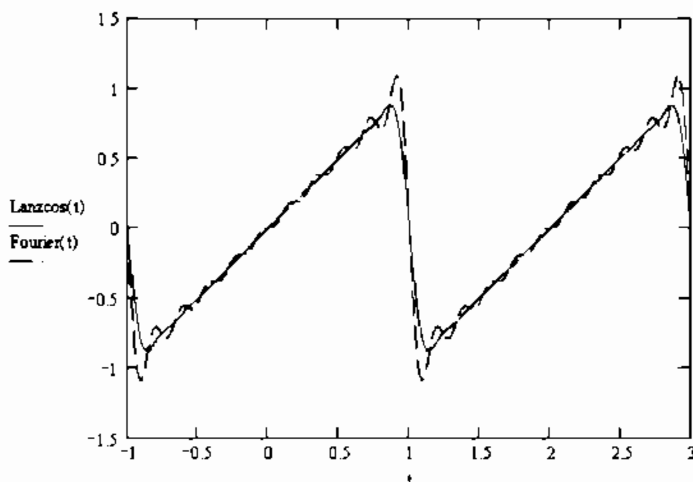


Figura 1.33 Aproximações da rampa usando série de Fourier e série de Fourier com fator de Lanczos. Observe o comportamento em torno das descontinuidades, nas quais ocorre a atenuação do "efeito de Gibbs".

Como relação à manipulação de séries de Fourier (trigonométrica e exponencial), os seguintes resultados são de grande valia [SKO&RED 1966]:

TEOREMA (DERIVANDO SÉRIES).

Se $f(t)$ é contínua e periódica e $f'(t)$ é seccionalmente contínua, então a série de Fourier de $f'(t)$ pode ser obtida diferenciando cada termo da série de Fourier de $f(t)$. ■

TEOREMA (INTEGRANDO SÉRIES).

Qualquer série de Fourier pode ser integrada termo a termo entre quaisquer limites. A série integrada converge para a integral da função periódica da série original. ■

TEOREMA DE KOLMOGOROV-SELIVERSTOV-PLESSNER.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\log n < +\infty$ então a série trigonométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)$ converge em quase toda parte (p.p.). ■

CONVERGÊNCIA UNIFORME


Karl Weierstrass (1815-1897).

TESTE M DE WEIERSTRASS (Transforma o problema de convergência de séries de funções em convergência de séries numéricas)

Dado $\left\{\sum_{n=1}^{N} s_n(t)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência de funções reais, $s_n: I \to R$, se $\exists\ M_n \geq 0$ |

$|s_n(t)| \leq M_n$ $(\forall t \in I)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n(t)$ converge uniformemente em I para alguma função $s(t)$. ■

Aplicação imediata:

A versão fraca (1° teorema da convergência uniforme de séries de Fourier).

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA UNIFORME 1.

Se f é periódica, contínua, com 1ª derivada contínua e derivável, com 2ª derivada integrável e absolutamente integrável ($f'' \in L^1$), então a série truncada $f_N(t)$ converge uniformemente no período. ■

Prova.

Usando a versão trigonométrica para a série,

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n.\cos(nw_0 t) + b_n.sen(nw_0 t)$$

$S_n(t)$ 

$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} S_n(t)$. Daí, $|f_N(t)| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n|$.

Mas, de acordo com um dos problemas da lista de exercícios, tem-se

$\sum_{n=0}^{N}|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{N}|b_n| \leq \frac{M}{n^2}$, Portanto (vide lista novamente)

$$|f_N(t)| \leq a_0 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{M}{n^2}\right) < +\infty$$

-------------> f_N converge uniformemente.
M de Weierstrass

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA UNIFORME 2.

Se $f: \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{R}$ é periódica, contínua, com primeira derivada integrável e absolutamente integrável ($f' \in L^1$), então a série truncada $f_N(t)$ converge uniformemente em $\boldsymbol{I}$. ■

TEOREMA DE FEJÉR

Seja a soma de Fejér $\sigma_{N+1}(t) := \frac{1}{N+1}[f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + ... + f_N(t)]$.

Se $f: \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{R}$ é seccionalmente contínua e periódica, então:

i) $(\forall t) \quad \lim_{N \to \infty} \sigma_{N+1}(t) = \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$

ii) $\{\sigma_{N+1}(t)\}_{N=1}^{\infty}$ converge uniformemente para f em qualquer sub-intervalo contínuo de $\boldsymbol{I}$. ■

CONCLUSÃO: A média aritmética das séries de Fourier truncadas até o enésimo harmônico converge uniformemente.

Cabe então estudar a abordagem de Fejér em termos de núcleos: OS NÚCLEOS DE FEJÉR.


Lipót Fejér (1880-1959).

Já foi mostrado (núcleo de Dirichlet) que

$$f_N(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t')D_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-t')\right)dt'$$

Tomando-se $\sigma_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f_N(t)$, então:

$$\sigma_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f_N(t) = \frac{1}{N+1}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=0}^{N} D_n\left(\frac{2\pi}{T}(t-t')\right)f(t')dt'$$

Define-se o núcleo de Fejér por:

$$F_{N+1}(t) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)$$

(isto corresponde à média aritmética dos núcleos parciais de Dirichlet). Assim,

$$\sigma_{N+1}(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t')F_{N+1}\left(\frac{2\pi}{T}(t-t')\right)dt'.$$

JANELAS (*DATA WINDOWS*) TAPERS
De um modo geral, a série de Fourier pode ser observada através de "*data windows*" [MOR 1979], [MOR 1997].



John Tukey (1915-2000)
Criador do algoritmo FFT, cunhou muitos termos em estatística, análise (*bits* de informação, *tapers*, *aliasing*, *smoothing* etc.)

Tapers – decrescimento gradual de largura ou comprimento.

Série truncada (N termos) com introdução de *tapers*

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} h\left(\frac{n}{N}\right)c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}.$$

Definirdo-se $H_N(t) := \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} h\left(\frac{n}{N}\right).e^{-jnt}$, então, substituindo a fórmula do coeficiente de Fourier e manipulando, chega-se a:

$f_N(t) = \int_{-T/2}^{T/2} H_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-t')\right) f(t')dt'$

Janela 

H(.) pode ser ajustado para resultar nas "janelas" já estudadas (Dirichlet, Fejér), mas pode incluir novas janelas de dados.

A representação em uma janela de Lanczos $L_N(x)$ é tal que:

$$\bar{f}_N(t) = \int_0^T f(\tau) L_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right) d\tau .$$

Uma expressão para $L_N(.)$, similar aquela da janela de Dirichlet, corresponde a:

$$L_N(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} Sa\left(\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}\right) e^{jnx} .$$

Esse formalismo corresponde, portanto, a um *taper* para o ajuste dos coeficientes de Fourier da série truncada (dito fator de convergência de Lanczos[13]), cuja expressão é

$$l\left[\frac{n}{N}\right] = Sa\left(\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}\right).$$

---

[13] N.B. alguns autores usam o intervalo $\left(t-\frac{T/2}{N}, t+\frac{T/2}{N}\right)$, resultando em fórmulas praticamente idênticas, apenas eliminando o fator ½ presente nas expressões envolvendo $\frac{1}{N+\frac{1}{2}}$.

Tabela VI.1 *Tapers* : Janelas de Dirichlet, Fejér, Hamming, Hanning, de la Vallé-Poussin, Parzen etc.

$h(n/N)$ $0 \le \lvert n \rvert \le N$	$H_N(t)$	« Tapers »
1	$D_N(t)$	Dirichlet
$1-\frac{\lvert n \rvert}{N+1}$	$F_{N+1}(t)$	Fejér
$\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right)$	$\frac{1}{2}D_N(t)+\frac{1}{4}D_N\left(t-\frac{\pi}{N}\right)+\frac{1}{4}D_N\left(t+\frac{\pi}{N}\right)$	Hamming
$1-\frac{n^2}{N^2}$	$D_N(t)+\frac{1}{N^2}\frac{d^2D_N(t)}{dt^2}$	Parzen
$e^{-n^2/2N^2}$	$\approx \frac{N}{\sqrt{\pi 2\pi}}e^{-N^2t^2/2}$	Weierstrass
$Sa\left(\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}\right)$	$L_N(t)$	Lanczos

Excelente material para visualizar os efeitos dos *tapers* foi desenvolvido em plataforma Matlab® por **Rafael Santos de Souza** (UFPE) e gentilmente disponibilizado *freeware* em:

http://www2.ee.ufpe.br/codec/tapers.html

A Série Quantizada de Fourier (série não-ortogonal)

<<The purpose of computing is insight, not numbers.>> **R.W. Hamming.**

Uma abordagem para quantizar a série de Fourier consiste em digitalizar a bases de sinais empregada na decomposição. Seja a função sinal $Sgn(.)$ definida de modo usual,

$$Sgn(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0. \end{cases}$$

Fixada uma janela de amplitude T, $w_0 := 2\pi/T$, uma das possíveis decomposições em séries pode considerar o conjunto de sinais digitais[14]

$$\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} = \{1, Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\text{sen}(nw_0t))\}_{n=1}^{+\infty}$$

ao invés da decomposição trigonométrica clássica

$$\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} = \{1, \cos(nw_0t), \text{sen}(nw_0t)\}_{n=1}^{+\infty}.$$

A análise da decomposição pode ser conduzida considerando-se as séries trigonométricas associadas aos sinais $Sgn(sen(x))$ e $Sgn(cos(x))$, $0 \le x < 2\pi$, respectivamente:

$$Sgn(sen(x)) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{sen((2k+1)x)}{2k+1}, \text{ e}$$

$$Sgn(\cos(x)) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}.$$

O conjunto $\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} = \{1, Sgn(\cos(nw_0t), Sgn(sen(nw_0t)))\}_n$ *não é ortogonal*, porém algumas propriedades de ortogonalidade dos sinais neste conjunto podem ser constatadas, aplicando as duas séries de Fourier acima:

$$< Sgn(sen(nw_0t), Sgn(\cos(mw_0t)) >= \int_0^T Sgn(sen(nw_0t)Sgn(\cos(mw_0t))dt = 0$$

$(\forall n,m)$.

Isto segue da relação:

$$\int_0^T Sgn(\text{sen}(nw_0t)Sgn(\text{sen}(mw_0t))dt = \int_0^T \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\text{sen}((2k+1)nw_0t)}{2k+1}.\frac{4}{\pi}\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k'+1)mw_0t)}{2k'+1}dt$$

14 Vide: Uma Ferramenta para Análise de Sons Musicais [SOU *et al.* 2005].

a qual resulta em:

$$\int_0^T Sgn(\text{sen}(nw_0t)Sgn(\cos(mw_0t))dt =$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1).(2k'+1)}\int_0^T \text{sen}((2k+1)nw_0t).\cos((2k'+1)mw_0t)dt = 0.$$

Para $n=m$, consta-se facilmente que

$$< Sgn(\cos(nw_0t), Sgn(\cos(nw_0t)) >= < Sgn(\cos(nw_0t), Sgn(\cos(nw_0t)) >= T.$$

Resta avaliar ($\forall n \neq m$)

$$< Sgn(\cos(nw_0t), Sgn(\cos(mw_0t)) >= \int_0^T Sgn(\cos(nw_0t)Sgn(\cos(mw_0t))dt \text{ e}$$

$$< Sgn(sen(nw_0t), Sgn(sen(mw_0t)) >= \int_0^T Sgn(sen(nw_0t)Sgn(sen(mw_0t))dt .$$

Por exemplo, para avaliar o produto interno entre senos-digitais:

$$\int_0^T Sgn(sen(nw_0t)Sgn(sen(mw_0t))dt = \int_0^T \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{sen((2k+1)nw_0t)}{2k+1}.\frac{4}{\pi}\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{sen((2k'+1)mw_0t)}{2k'+1}dt$$

Assim,

$$\int_0^T Sgn(sen(nw_0t)Sgn(sen(mw_0t))dt =$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1).(2k'+1)}\int_0^T sen((2k+1)nw_0t).sen((2k'+1)mw_0t)dt.$$

Note que a integral do 2º membro é nula, provido que $(2k+1)n \neq (2k'+1)m$ (i.e., que os harmônicos n e m estejam numa razão entre dois ímpares).

O produto interno entre sinais do conjunto $\{1, Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(sen(nw_0t))\}_{n=1}^{+\infty}$ pode ser avaliado em termos da função *qui-fração* definida por

$$\chi(n,m) = \chi\left(\frac{n}{m}\right) = \chi\left(\frac{p}{q}\right) := \begin{cases} \dfrac{1}{p.q} & \text{se } p, q \text{ são ímpares} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que p/q é a fração irredutível correspondente a n/m. As seguintes propriedades são imediatas: $\chi(n,n) = 1$ e $\chi(n,m) = \chi(m,n)$.

Lembrando que a série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, tem-se $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 . \frac{\pi^2}{8} . \chi(n,m)\frac{T}{2}$.

O produto interno vale $< \phi_n, \phi_m >= \chi(n,m).T$

Tabela VII.1 Valor do produto interno entre as funções cosseno-digital (o resultado é idêntico para o seno-digital, apenas com sinal alternando em cada linha).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0																				
1		T		T/3		T/5		T/7		T/9		T/11		T/13		T/15		T/17		T/19	
2			T				T/3				T/5				T/7				T/9		
3		T/3		T		T/15		T/21		T/3		T/33		T/39		T/5		T/51		T/57	
4					T								T/3								T/5
5		T/5		T/15		T		T/35		T/45		T/55		T/65		T/3		T/85		T/95	
6			T/3				T				T/15				T/21				T/3		
7		T/7		T/21		T/35		T		T/63		T/77		T/91		T/105		T/119		T/133	
8									T												
9		T/9		T/3		T/45		T/63		T		T/99		T/117		T/15		T/153		T/171	
10			T/5				T/15				T				T/35				T/45		
11		T/11		T/33		T/55		T/77		T/99		T		T/143		T/165		T/187		T/209	
12					T/3								T								T/15
13		T/13		T/39		T/65		T/91		T/117		T/143		T		T/195		T/221		T/247	
14			T/7				T/21				T/35				T				T/63		
15		T/15		T/5		T/3		T/105		T/15		T/165		T/195		T		T/255		T/285	
16																	T				
17		T/17		T/51		T/85		T/119		T/153		T/187		T/221		T/255		T		T/323	
18			T/9				T/3				T/45				T/63				T		
19		T/19		T/57		T/95		T/133		T/171		T/209		T/247		T/285		T/323		T	
20					T/5								T/15								T

A série "digital" de Fourier para um sinal $f(t)$ num intervalo de amplitude T é expressa por (**H. de Oliveira e Diego Felix de Souza**):

$$f(t) \cong A_0 + \sum_{n \in P} A_n Sgn(\cos(nw_0 t)) + B_n Sgn(\text{sen}(nw_0 t)), \quad t_0 < t < t_0 + T,$$

em que os coeficientes de Fourier-Plank devem ser escolhidos para minimizar o erro médio quadrático (norma do erro).

Fixado um número $N+1$ de termos da série (N "harmônicos digitais"), os coeficientes (A_0 à parte) podem ser obtidos resolvendo os sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \frac{\chi_{1,2}}{2} & \frac{\chi_{1,3}}{2} & & \frac{\chi_{1,N}}{2} \\ \frac{\chi_{2,1}}{2} & \chi_{2,2} & \frac{\chi_{2,3}}{2} & & \frac{\chi_{2,N}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\chi_{N,1}}{2} & \frac{\chi_{N,2}}{2} & \frac{\chi_{N,3}}{2} & & \chi_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f(t), Sgn(\cos(w_0 t)) > \\ < f(t), Sgn(\cos(2w_0 t)) > \\ < f(t), Sgn(\cos(3w_0 t)) > \\ \vdots \\ < f(t), Sgn(\cos(Nw_0 t)) > \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \frac{\chi_{1,2}}{2} & \frac{\chi_{1,3}}{2} & & \frac{\chi_{1,N}}{2} \\ \frac{\chi_{2,1}}{2} & \chi_{2,2} & \frac{\chi_{2,3}}{2} & & \frac{\chi_{2,N}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\chi_{N,1}}{2} & \frac{\chi_{N,2}}{2} & \frac{\chi_{N,3}}{2} & & \chi_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f(t), Sgn(\text{sen}(w_0 t)) > \\ < f(t), Sgn(\text{sen}(2w_0 t)) > \\ < f(t), Sgn(\text{sen}(3w_0 t)) > \\ \vdots \\ < f(t), Sgn(\text{sen}(Nw_0 t)) > \end{bmatrix}.$$

As matrizes para os casos particulares N=5 e N=10 são exibidas a seguir, a título ilustrativo. As matrizes obtidas são sempre "*quase*-diagonais" e a inversa é uma "*quase*-identidade". Esta análise é bastante próxima àquela proposta por **Cintra** e col. [CIN *et al.* 2004] para a transformada arredondada de Hartley.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{70} & 0 & \frac{1}{90} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \frac{1}{70} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{126} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{90} & 0 & \frac{1}{126} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, como uma *aproximação simplificadora*, as seguintes relações podem ser usadas para encontrar uma estimativa dos coeficientes:

$$A_0 \cong \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \,;\, A_n \cong \frac{1}{T}\int_0^T f(t)Sgn(\cos(nw_0 t))dt \text{ e}$$

$$B_n \cong \frac{1}{T}\int_0^T f(t)Sgn(sen(nw_0 t))dt \,.$$

Estas relações correspondem a assumir as formas de onda $\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$ como se fossem ortogonais e são praticamente idênticas às expressões clássicas da série trigonométrica de Fourier. A maneira de transformar as operações de multiplicação em ponto fixo corresponde a multiplicar todos os coeficientes por 2.(N!!) se N é ímpar, ou 2.((N-1)!!), caso contrário.

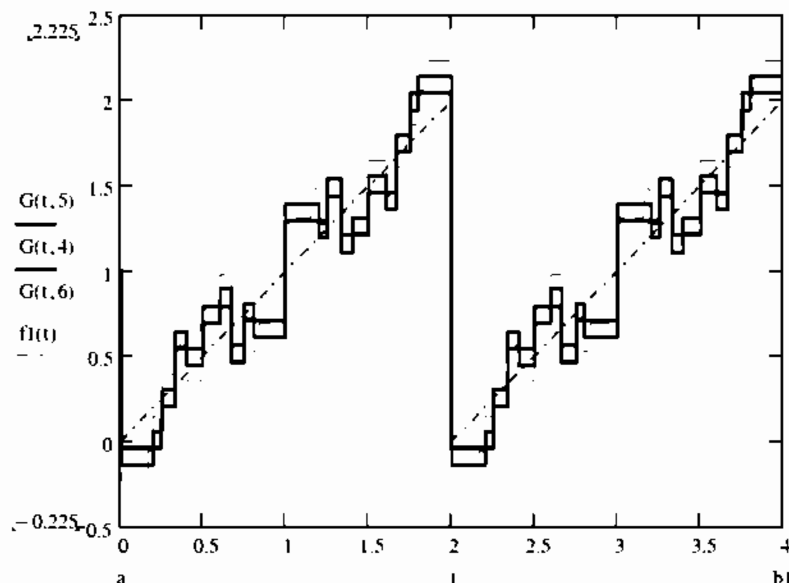


Figura 1.34 Aproximações usando a Série Quantizada de Fourier para uma rampa de período 2 (pontilhada). As curvas G(*t*,*N*) denotam as aproximações utilizando *N* harmônicos digitais, *N*=4, 5 e 6.

Os coeficientes $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ da série de Fourier quantizada são relacionados com os coeficientes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ da série trigonométrica de Fourier através das relações:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}a_{n(2k+1)}, \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)}b_{n(2k+1)}.$$

Assim, os valores dos coeficientes da série quantizada podem ser calculados em termos dos coeficientes da série trigonométrica clássica:

$$B_1 = \frac{2.1}{\pi}\left(b_1 + \frac{b_3}{3} + \frac{b_5}{5} + \ldots\right)$$

$$B_2 = \frac{2.2}{\pi}\left(\frac{b_2}{2} + \frac{b_6}{6} + \frac{b_{10}}{10} + \ldots\right)$$

$$B_3 = \frac{2.3}{\pi}\left(\frac{b_3}{3} + \frac{b_9}{9} + \frac{b_{15}}{15} + \ldots\right)$$

ESTIMATIVA HARMÔNICA LIVRE DE MULTIPLICAÇÕES

As aproximações geradas pela série quantizada podem parecer pouco adequadas, principalmente devido ao fato de que o erro da aproximação não diminui assintoticamente com o aumento do número de harmônicos da série digital. Entretanto, propõe-se o uso de uma fórmula de inversão de Möbius [LIDL&NIE 1986] para estimar os coeficientes de Fourier com base nos coeficientes da série quantizada.

Usando-se uma fórmula de inversão, os coeficientes $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ da série trigonométrica de Fourier podem ser relacionados com os coeficientes $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ da série de Fourier quantizada, através das relações:

$$a_n = \frac{\pi}{2} \cdot A_n + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \cdot A_{n(2k+1)} \ ,$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} \cdot B_n - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \cdot B_{n(2k+1)} \ .$$

Para um sinal tempo-discreto com N amostras, considera-se um número de harmônicos $N_H < \lfloor N/2 \rfloor$ e as séries infinitas são calculadas até $L(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{N_H}{n} - 1\right) \right\rfloor$, resultando em:

$$\tilde{a}_n = \frac{\pi}{2} \cdot A_n + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{L(n)} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \cdot A_{n(2k+1)} \qquad \text{(I)}$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\pi}{2} \cdot B_n - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{L(n)} \frac{1}{(2k+1)} \cdot B_{n(2k+1)} \ . \qquad \text{(II)}$$

Truncando a série quantizada em N_H=10 harmônicos digitais, por exemplo, resulta nas seguintes estimativas para os coeficientes trigonométricos de Fourier:

$$\tilde{b}_1 = \frac{\pi}{2}\left(B_1 - \frac{B_3}{3} - \frac{B_5}{5} - \frac{B_7}{7} - \frac{B_9}{9}\right)$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{\pi}{2}\left(B_2 - \frac{B_6}{3} - \frac{B_{10}}{5}\right)$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{\pi}{2}\left(B_3 - \frac{B_9}{3}\right) \dots$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\pi}{2}(B_n) \quad 4 \le n \le 10.$$

Nota-se que os coeficientes $\{\tilde{a}_n\}_1^{N_H}$ convergem mais rápidos do que os coeficientes $\{\tilde{b}_n\}_1^{N_H}$ da série trigonométrica de Fourier, por se tratar de uma série alternada. Nota-se também que se considerando poucos harmônicos para a Série quantizada de Fourier, as aproximações chegam praticamente a coincidir com aquelas da Série de Fourier Clássica. Desta forma, ao invés de utilizar $L(n)$ termos, pode-se fixá-los em um número pré-determinado de termos igual a K. Uma estimativa livre de multiplicações ponto flutuante (de baixa complexidade) para aplicações em tempo real intensivas em avaliação de harmônicos pode ser realizada através da série quantizada de Fourier (série digital de Fourier), como descrito a seguir. A maneira de transformar as operações de multiplicação em ponto fixo corresponde a multiplicar todos os coeficientes por 2.(N!!) se N é ímpar, ou 2.((N-1)!!), caso contrário, em que N!! [SNE 1976].

O cálculo numérico (versão discreta) dos coeficientes da série de Fourier digital (quantizada) só envolve adições de amostras e é livre de multiplicações. Sendo o sinal de áudio amostrado a uma taxa de $1/T_s$ amostras.segundos^{-1} então:

$$T\tilde{A}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_s)Sgn\left(\cos(\frac{2\pi nk}{NT_s})\right), \quad 1 \leq n \leq N\text{-}1.$$

$$T\tilde{B}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_s)Sgn\left(sen(\frac{2\pi nk}{NT_s})\right), \quad 1 \leq n \leq N\text{-}1.$$

Os valores dos coeficientes de Fourier estimados via série quantizada foram obtidos usando um arquivo .wav contendo a *Quinta Sinfonia* de Beethoven, (16-bit, mono, *signed*), com taxa de amostragem de 22.050 Hz, considerando-se apenas K=3. A Tabela que segue ilustra a concordância das aproximações e os coeficientes exatos.

TABELA VIII.1 Coeficientes da Série Trigonométrica de Fourier, para um sinal com N=128 amostras da Quinta Sinfonia de Beethoven.

Aproximações síntese clássica de Fourier		Aproximações síntese com série de Fourier Quantizada	
a_1=-0,0129	b_1=-0,0080	$\tilde{a}_1$= -0,0133	$\tilde{b}_1$=-0,0089
a_2=-0,0074	b_2=0,0015	$\tilde{a}_2$= -0,0082	$\tilde{b}_2$=-0,0000
a_3=0,0003	b_3=-0,0034	$\tilde{a}_3$=0,0015	$\tilde{b}_3$=-0,0043
a_4=0,0023	b_4=-0,0015	$\tilde{a}_4$=0,0027	$\tilde{b}_4$=-0,0017
a_5=-0,0070	b_5=0,0035	$\tilde{a}_5$=-0,0079	$\tilde{b}$ =0,0031

A figura a seguir mostra os resultados obtidos para o trecho inicial da sinfonia, de duração 1 segundo. Apesar das pequenas diferenças entre as séries, os dois arquivos correspondentes aos sinais sintetizados soam próximos (detalhes em http://www2.ee.ufpe.br/codec/Fourierquantizada.html). A série quantizada introduz um ruído de fundo (quantização) que pode ser desprezível em aplicações que envolvam apenas a detecção do conteúdo harmônico, sem maior preocupação com a qualidade. Podem também ser de valia em métodos para classificação de música [WIE 2001].

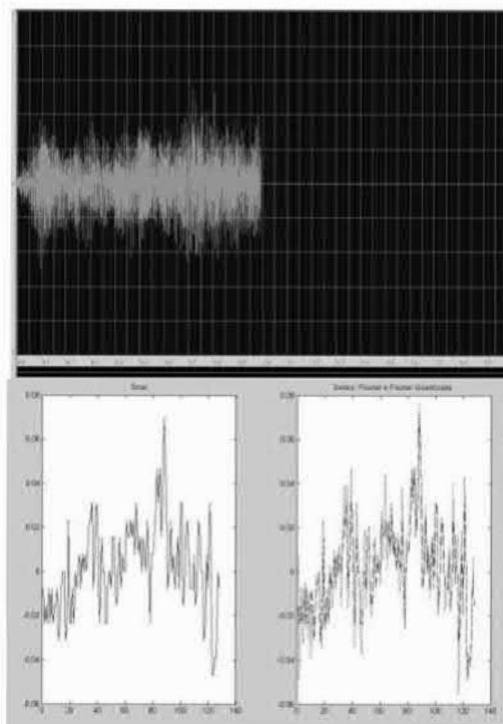


Figura 1.35 a) Trecho de ~1,0 segundo da Quinta Sinfonia de Beethoven, correspondente a 21.495 amostras (16-bit, mono, *signed*) taxa de amostragem 22.050 Hz; b) Trecho inicial do sinal original (N=128 amostras); Aproximações usando síntese clássica de Fourier (*traço*) e síntese com série de Fourier Quantizada (*ponto*).

APPLETS SOBRE AUDIO E FOURIER

- http://www.phys.unca.edu/demos/demos_sound.asp várias applets
- http://web.mit.edu/jorloff/www/fouriersound/fouriersound.html
- http://library.thinkquest.org/19537/java/Wave.html

APPLETS ENVOLVENDO REPRESENTAÇÃO FASORIAL

- http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Fourier/fourier1.html
- http://ptolemy.eecs.berkeley.edu/eecs20/berkeley/phasors/demo/phasors.html

Espectro de Sinais

CAPÍTULO 2

A TRANSFORMADA DE FOURIER

<<Fourier's theorem is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but it may be said to furnish an indispensable instrument in the treatement of nearly every recondite question in modern physics>> **Lord Kelvin**.

No caso de sinais *aperiódicos*, o uso da transformada de Fourier aparece como ferramenta natural para a análise do espectro. Um dado sinal físico possui duas representações equivalentes, porém diferentes: No domínio do tempo e no domínio da freqüência [PAPO 1977], [BRI 1988], [FIGU 1977], [BRA 1978], [BAY&MAR 1988], [GAS&WIT 2000].

Definição (ANÁLISE DE FOURIER):
A transformada de Fourier de um sinal $f(t)$ $-\infty<t<+\infty$ é $F(w):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}dt$, denotada algumas vezes $\Im[f(t)]$, se a integral existe. ■

Conhecendo-se o espectro $F(w)$ de um sinal, é possível tornar a obtê-lo no domínio temporal utilizando a transformada inversa (SÍNTESE DE FOURIER):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{jwt}dw. \quad ■$$

A unicidade da transformada pode ser demonstrada [KREY 1983], *garantindo que duas funções com a mesma transformada são idênticas a menos dos pontos de descontinuidade*. Diz-se então que $f(t)$ e $F(w)$ formam um par de transformada, indicando isso por

$$f(t) \leftrightarrow F(w).$$

De fato, a unicidade considera classes de funções equivalentes, idênticas a menos dos pontos de descontinuidade, em termos mais rigorosos. A variável *w* não deve ser encarada como uma variável muda (como fazem os matemáticos); ela tem interpretação inequívoca: O conceito de freqüência deve estar associado a uma repetição periódico-senoidal [MAN 1992].

A IDÉIA DA TRANSFORMADA

Sinais aperiódicos podem ser encarados como funções periódicas, para as quais o período de repetições cresce *ad infinitum*. A princípio, são apenas admitidos sinais absolutamente integráveis na reta real, i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

Funções no espaço L^2 [FIGU 1977] são simplesmente interpretadas como sinais elétricos (em tensão ou corrente) de energia finita, calculando-se a energia dissipada através de um resistor padrão, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$.

A motivação tradicional consiste na passagem da série à transformada de Fourier. Sinais aperiódicos são aproximados por sinais periódicos para os quais o período de repetição cresce *ad infinitum* (figura 2.1) Considera-se então um período T finito. Assim, com $w_0 := 2\pi/T$, vale a representação em série dentro do intervalo especificado, cada vez maior:

$$f(t) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jnw_0 t).$$

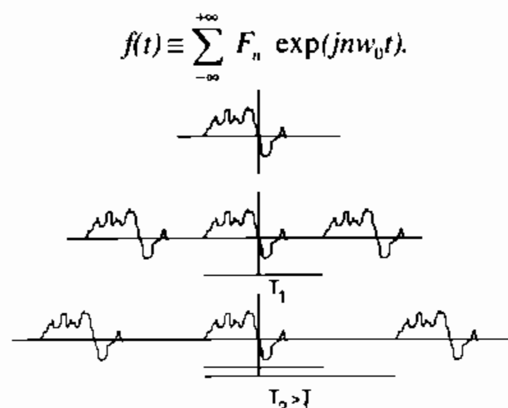


Figura 2.1 Sinais aperiódicos vistos como periódicos com período crescente *ad infinitum*.

O raciocínio utilizado para introduzir informalmente a transformada pode ser muito bem ilustrado referindo-se ao Exercício 6, para avaliar o espectro do sinal:

$$f(t)=\begin{cases}1 & se \ |t|<\tau \\ 0 & se \ |t|\geq\tau.\end{cases}$$

A expansão em série exponencial de Fourier, admitindo-se um período T, resulta em

$$f(t)\cong\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jnw_0 t},$$

em que $w_0:=2\pi/T$ e $F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jnw_0 t}dt$.

Ao tomar-se o limite $T\rightarrow\infty$ (notar a simetria em torno da origem), os efeitos no espectro discreto são os seguintes:

a) Diminuição no espaçamento entre as raias;
b) Aumento no número de linhas espectrais (densidade de raias);
c) As amplitudes no espectro discreto tendem a zero.

$$\lim_{T\rightarrow\infty}|F_n|=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\left|\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,e^{jnw_0t}\,dt\right|=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|\,dt=0.$$

O espectro descontínuo é definido para as freqüências 0, w_0, $2w_0$, $3w_0$,... etc. Assim, $\Delta w=(n+1)w_0-nw_0=w_0$ e quando $T\rightarrow+\infty$ tem-se que $\Delta w\rightarrow 0$. O sinal passa a ser analisado (decomposto) em toda a reta real, ao invés de fazê-lo através de uma janela finita.

Isto aumenta o número de linhas espectrais e o espectro discreto tende a um espectro contínuo (veja no exercício 6). No limite, em vez dos harmônicos discretos nw_o as freqüências presentes assumem qualquer valor na reta.

Os valores nw_0 são substituídos por w variando no *continuum*. Como os coeficientes de Fourier F_n tendem a zero, é necessário reescaloná-los (*zoom*) de forma que possam ser visualizados convenientemente. O produto do coeficiente de Fourier por T corresponde a uma simples mudança de escala necessária para visualizar

o espectro adequadamente. Trata-se de um *zoom*. Desta forma, procura-se também interpretar $F(w)$ como um conjunto de coeficientes de Fourier indexado no *continuum*.

Em resumo: Aumentando-se T, observa-se no espectro obtido os efeitos da diminuição do espaçamento entre raias, bem como o aumento no número de linhas espectrais (i.e., aumento da densidade de raias), enquanto as amplitudes do espectro discreto tendem a zero, ou seja, os coeficientes de Fourier anulam-se: $\lim_{T\to+\infty} |F_n| = 0$.

Define-se $F(w) \cong \lim_{T\to\infty} F_n T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jwt}\, dt$, de modo que $F(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jwt} dt$ corresponde a uma representação do espectro do sinal aperiódico[15].

A idéia da transformada inversa de Fourier pode ser compreendida observando-se que

$$F_n = \lim_{T\to\infty} \frac{F(w)}{T} = \lim_{\substack{T\to\infty \\ w_0\to 0}} \frac{w_0}{2\pi} F(w) \cdot$$

O espaçamento entre raias consecutivas é $\Delta w = w_0$, de modo que a série exponencial $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t}$ corresponde a:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta w\to 0} \frac{F(w)\,\Delta w}{2\pi} e^{jn\Delta wt}.$$

Na passagem ao limite, o somatório transforma-se em integral,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{jwt} dw.$$

Embora sem rigor matemático, esta representação é bastante interessante para introdução da transformada. Ela corresponde a uma expansão em "Série de Fourier" contendo um número infinito não-enumerável de harmônicos.

---

[15] O produto do Coeficiente de Fourier por T corresponde a uma mudança de escala para visualizar adequadamente o espectro.

A propriedade mais usada da transformada é que o operador é um operador linear, i.e.:

LINEARIDADE

$$\Im[f(t) + g(t)] = \Im[f(t)] + \Im[g(t)]\ ,\qquad \Im[c\,f(t)] = c\,\Im[f(t)]$$

c é um complexo. ■

A propriedade de unicidade verifica-se no mesmo sentido que em séries, todavia a validade do resultado agora é na reta real inteira, não apenas em uma janela finita.

Duas funções bastante usadas na análise de sinais são a "Porta" e o "Triângulo", definidas de acordo com:

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

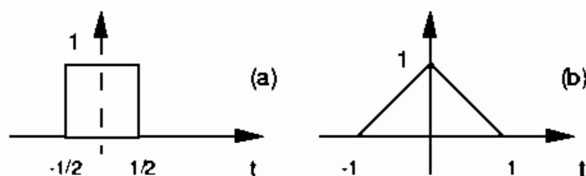


Figura 2.2 Pulso Retangular e Triangular: Função Porta e Triângulo.

<u>Exercício 6</u>

Avaliar a transformada de Fourier da função porta (*gate*)

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 \text{ se } |t| \le \tau/2 \\ 0 \ \ \text{caso contrário} \end{cases}.$$

<u>Solução</u>:

Usando a definição, $F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t/\tau) e^{-jwt} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jwt} dt$.

Avaliando diretamente a integral, tem-se:

$$F(w) = \frac{e^{jw\frac{\tau}{2}} - e^{-jw\frac{\tau}{2}}}{jw} = \tau \cdot \frac{e^{jw\frac{\tau}{2}} - e^{-jw\frac{\tau}{2}}}{2j\frac{w\tau}{2}}\ , \quad \text{donde}$$

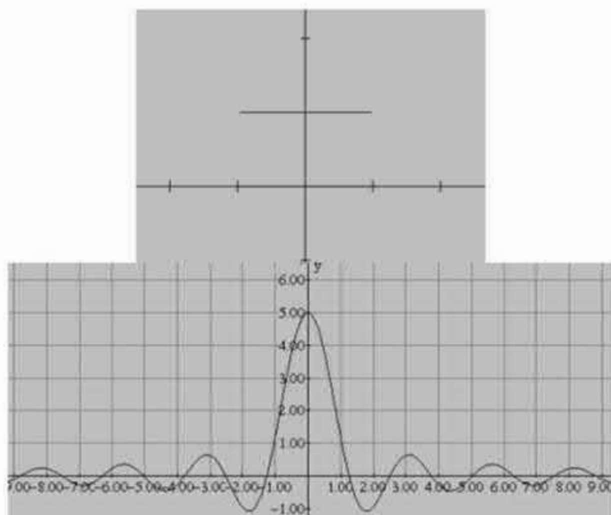


Figura 2.3 Pulso retangular e seu espectro.

O resultado é verificado facilmente a partir da solução do exercício 5 e corresponde à *envoltória do espectro discreto.*

Os zeros no espectro ocorrem para $sen(w\tau/2) = 0$ ou $w=n(2\pi/\tau)$, n inteiro. Observa-se que $\lim_{w \to \infty} F(w) = 0$, o que é válido para todo sinal físico.

Em 1942, **R.V.L. Hartley** introduziu uma transformada mais simétrica que a transformada de Fourier, com a vantagem adicional de resultar em apenas sinais reais, em contraste com o espectro complexo usual nas transformada de Fourier. A transformada de Hartley é definida por [HAR 1942]

$$F(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) cas(\nu t) dt \text{ , } \nu \in \mathbb{R},$$

em que $cas(t) := \cos t + \operatorname{sen} t$. Usa-se também a função associada $cas'(t) := \cos t - \operatorname{sen} t$.


Ralph Vinton Lyon Hartley (1888-1970).

Embora vista inicialmente como uma ferramenta de aplicação numérica, tendo conexão com o mundo físico apenas via transformada de Fourier, a transformada de Hartley mostrou-se ser um instrumento poderoso em um grande número de aplicações [BRA 1978]. O espectro de Hartley de um sinal real é sempre real.

Esta transformada é uma involução: sua transformada inversa é exatamente igual à transformada direta (antitransformada = transformada). Assim, o mesmo algoritmo usado para transformar quanto para inverter à transformada.

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\nu)cas(\nu t)dt\ .$$

CONSIDERAÇÕES SOBRE A TRANSFORMADA

<<L'étude approfondie de la nature est la source féconde des découvertes mathématiques...>> **J.B. Fourier.**

No caso geral, a transformada $F(w)$ de um sinal $f(t)$ é uma função complexa da freqüência. Alguns resultados de interesse são obtidos quando $f(t)$ é um sinal real. Da identidade de Euler, $e^{j\theta}=\cos\theta+jsen\theta$, tem-se:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(wt)dt-j\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)sen(wt)dt\ .$$

Proposição. Dado um par de transformada $f(t)\leftrightarrow F(w)$, então

a) se $f(t)$ é real e par, então $F(w)$ é real e par,

b) se $f(t)$ é real e ímpar, então $F(w)$ é imaginário e ímpar. ■

$F(w)=2\int_0^{+\infty}f(t).\cos(wt)dt$ para $f(t)$ real e par;

$F(w)=-2j.\int_0^{+\infty}f(t).\text{sen}(wt)dt$ para $f(t)$ real e ímpar.

O espectro do sinal pode ser estudado na forma magnitude e fase, reescrevendo a função complexa $F(w)$ sob a forma $F(w)=|F(w)|.e^{j\theta(w)}$.

Proposição.

Se $f(t)$ é um sinal real e $f(t)\leftrightarrow F(w)$, então $|F(w)|=|F(-w)|$ e $\theta(w)=-\theta(-w)$. ■

Esta proposição implica que todos os espectros dos sinais fisicamente existentes apresentam simetria par no módulo e simetria ímpar na fase do espectro. A verificação pode ser feita notando-se que para sinais reais

$$F^*(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{jwt}dt=\int f(t)e^{jwt}dt=F(-w).$$

Expressando $F^*(w)=|F(w)|e^{-j\theta(w)}$ e $F(-w)=|F(-w)|e^{j\theta(-w)}$ e levando em conta que as duas funções complexas são idênticas, seguem-se as condições sobre o módulo e fase.

Existência

Uma condição suficiente para a existência da transformada de Fourier é que (via desigualdade de Integrais) $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$. ■

A integrabilidade absoluta de $f(t)$ é apenas suficiente, porém não necessária para a existência de $F(w)$. Ela garante, via desigualdade de integrais, um espectro limitado, i.e., $(\forall w)$ $|F(w)|<+\infty$. Entretanto, nos casos para os quais esta condição não se verifica, a transformada não pode ser avaliada diretamente da definição[16]. O sinal $f(t)$ pode então ser representado como o limite de uma seqüência de funções absolutamente integráveis. Esta abordagem permite estender o conceito de transformada de Fourier para sinais que não são de energia finita e foi introduzida por **N. Wiener**. Normalmente os resultados não são limitados para algumas freqüências particulares do espectro (divergem em algum ponto do espectro).

---

16 Sinais de energia finita, i.e, de quadrado absolutamente integrável, apresentam espectro bem definido.

IMPULSO UNITÁRIO DE DIRAC

Sabe-se que a conhecida <<função>> impulso unitário[17] ou *delta de Dirac* $\delta(t)$ não é uma função no sentido matemático estrito. Na verdade, $\delta(t)$ é um membro de uma classe especial conhecida como funções generalizadas [BOU 1964], [BAY&MAR 1988], [GAS&WIT 2000].

Devido ao fato de não ser uma função, o impulso é definido por uma regra de atribuição, ao invés de uma equação convencional.



Paul Dirac (1902-1984). [Engenheiro Eletricista]

Definição:

Dada qualquer função ordinária $f(t)$ contínua em t=0, $\delta(t)$ é definido pela regra de atribuição

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\delta(t)\,dt = \begin{cases} f(0) & t_1 < 0 < t_2\ , \\ 0 & \text{caso contrário}\ . \end{cases} \quad \blacksquare$$

Tomando-se $f(t) = 1$, vê-se que um impulso na origem apresenta as propriedades:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \text{ (por abuso!) e } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)dt = 1$, para ε arbitrariamente pequeno.

Isto pode ser interpretado dizendo-se que o delta tem área unitária concentrada em torno do ponto t=0. Sua representação gráfica é mostrada a seguir.

---

[17] Introduzida pelo Engenheiro Eletricista **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902-1984). As funções generalizadas foram formalmente introduzidas na Teoria das Distribuições, em 1950-51 pelo Matemático Francês **Laurent Schwartz** (1915- 2002).

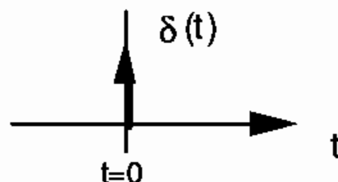


Figura 2.4 Delta de Dirac (Impulso Unitário).

Utilizando a definição, pode ser visto facilmente que $\delta(t)$ está relacionada com o degrau unitário através da relação:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = u(t)$$

Diferenciando ambos os membros (!), resulta $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

As funções convencionais que apresentam as propriedades do $\delta(t)$ no limite, podem ser usadas para avaliar expressões envolvendo impulsos. Em particular, dado $\varepsilon>0$, se $\delta_\varepsilon(t)$ define uma seqüência de funções pares tais que para qualquer função contínua na origem $f(t)$ têm-se:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t)\,dt = f(0) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\,dt = 1$$

Diz-se, então, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t) \quad .$$

Como exemplo de algumas seqüências de funções que tendem ao impulso, o leitor é referido à tabela I.2.

AMOSTRAGEM PONTUAL: Através de uma mudança na variável de integração, segue-se a propriedade de amostragem pontual da função impulso.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$, se f é contínua em t_0.

A transformada de Fourier de um impulso existe no limite e pode ser avaliada sem nenhuma dificuldade.

$$\Im[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-jwt}\, dt = e^{-jwt}\Big|_{t=0} = 1 \text{ , ou } \delta(t) \leftrightarrow 1 .$$

Tabela I.2. Seqüências de funções que definem um impulso de Dirac.

Pulso retangular	$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	
Função amostral	$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi\varepsilon}Sa\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	
Pulso gaussiano	$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\pi t^2/\varepsilon^2}$	
Pulsos exponenciais	$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\lvert t\rvert/2\varepsilon}$	
Pulsos triangulares	$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Lambda\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	

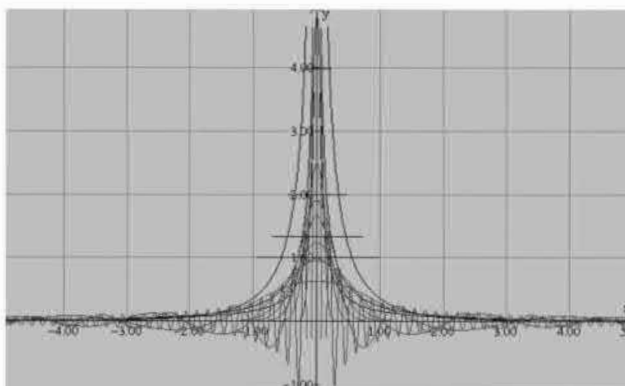


Figura 2.5 Diferentes seqüências de funções que tendem a um impulso de Dirac.

NOTA: Qualquer que seja a seqüência $\delta_\varepsilon(t)$ empregada, ao tomar-se suas transformadas, obtém-se, no limite, o mesmo resultado.

A distribuição $K\delta(t)$, em que K é uma constante real $K\in\mathbb{R}$, obedece a uma regra de atribuição similar àquela da definição do impulso de Dirac, exceto pelo fato de que "extrai" o valor de $Kf(0)$, f contínua na origem. Desde que a área sob a distribuição é K (ao invés da unidade), a mesma é chamada de impulso de Dirac de área K, com representação idêntica. Este resultado pode ser generalizado, mostrando-se que para qualquer função $g(t)$ contínua na origem, $g(t).\delta(t)$ corresponde a uma distribuição com área $g(0)$. Esta distribuição aplicada a um sinal $f(t)$ atribui o valor $g(0)f(0)$, se a integral envolve a origem; e o valor zero, caso contrário. Ela é, portanto, idêntica a uma distribuição $g(0)\delta(t)$. Também é fácil demonstrar (seguem detalhes na próxima seção) que as distribuições $\delta(at)$ e $\frac{1}{|a|}\delta(t), a\neq 0,$ são idênticas, fato denotado por: $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t),\ \ a\neq 0.$

Um pioneiro no uso de distribuições (ainda sob outra denominação) foi o grande **Oliver Heaviside**, que enfrentou assombrosa resistência dos contemporâneos.

AINDA SOBRE A TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES


Laurent Schwarz (1915-2002). Medalha Fields em 1950.

Rigorosamente, uma distribuição é um funcional linear contínuo sobre o espaço vetorial das funções reais infinitamente deriváveis. O apêndice B apresenta uma abordagem mais formal do que aquela que segue.

Uma outra distribuição muito interessante é a distribuição $\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$, a derivada do impulso de Dirac (referida como doublet unitário). Esta distribuição é definida pela seguinte regra de atribuição:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta'(t)dt = \begin{cases} -f'(0) & \text{se } t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

Para todo sinal $f(t)$ com derivada contínua na origem.

Veja que esta definição é perfeitamente compatível com a noção de derivada usual, considerando o quociente de Newton:

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \overset{!}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}.$$

Neste caso, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} f(t)dt$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+h) f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-h) - f(0)}{h} = -f'(0).$$

Interessante observar que

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau)u(t-\tau)d\tau = -\frac{d}{d\tau}u(t-\tau)\Big|_{\tau=0} = \delta(t).$$

Assim, $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$.

Generalizando este resultado, chega-se a distribuições da forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0),$$

para todos os sinais f com enésima derivada contínua na origem. Isto permite lidar com sinais que não possuem espectro formal (não são sinais de energia), tais como:

$$t \leftrightarrow 2\pi j\delta'(w)$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow jw$$

$$tu(t) \leftrightarrow \pi j\delta'(w)-\frac{1}{w^2}.$$

Proposição.

Se f é derivável, a derivada do produto se aplica quando um dos sinais é um impulso, i.e., a formula da derivada do produto vale para a distribuição $f(t).\delta(t)$,

$$[f(t).\ \delta(t)]'=f(t).\ \delta'(t)+f'(t).\ \delta(t).\ ■$$

Alguma cautela é requerida na manipulação de distribuições, especialmente nas identidades. Distribuições "isoladas" não têm sentido, exceto sob uma integração, como estabelecido nas respectivas regras de atribuição que as definem. A igualdade entre duas distribuições deve ser interpretada corretamente, pois é um conceito "extensional" de igualdade. Duas distribuições são idênticas quando elas resultam na mesma regra de atribuição. A identidade $(t+1)\delta(t)=\delta(t)$, deve ser formalmente verificada.

1º membro: $\forall\ g(t)$ contínua na origem, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)[(t+1)\delta(t)]dt=\int_{t_1}^{t_2} g(t)t[\delta(t)]dt+\int_{t_1}^{t_2} g(t)[\delta(t)]dt=\begin{cases} g(0) & t_1<0<t_2 \\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

2º membro: $\forall\ g(t)$ contínua na origem, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\delta(t)dt=\begin{cases} g(0) & t_1<0<t_2 \\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Na prática, usam-se freqüentemente regras simples com $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$, f contínua na origem, sem maiores cuidados. O

argumento é que como $\delta(t)$ é essencialmente nula "fora" da origem, então apenas o ponto $f(0)$ pondera a distribuição de Dirac original.

Exercício 7. Mostre a seguinte identidade envolvendo o doublet, provido que f é contínua na origem: $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$.

Solução.

1° membro: $\forall\ g(t)$ derivável na origem na origem, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\left[f(t)\delta'(t)\right]dt = \begin{cases} -\left(\left[g(t)f(t)\right]'_{t=0}\right) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas $\left[g(t)f(t)\right]'_{t=0} = g'(0)f(0) + g(0)f'(0)$. Então, vale a regra de atribuição:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\left[f(t)\delta'(t)\right]dt = \begin{cases} -\left(\left[g'(0)f(0) + g(0)f'(0)\right]\right) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2° membro: $\forall\ g(t)$ derivável na origem na origem, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\left[f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)\right]dt = f(0)\int_{t_1}^{t_2} g(t)\delta'(t)dt - f'(0)\int_{t_1}^{t_2} g(t)\delta(t)dt =$$

$$= \begin{cases} -\left[g'(0)f(0) + g(0)f'(0)\right] & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Q.E.D.

Outras propriedades interessantes da distribuição de Dirac incluem:

$$f(t).\delta'(t) = f(0).\delta'(t) - f'(0).\delta(t)$$

$$f'(t).\delta(t) = f'(0).\delta(t)$$

$$\left(f(t).\delta(t)\right)' = f(t).\delta'(t) + f'(t).\delta(t) = f(0).\delta'(t)$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(t-a) + \delta(t+a)\right],\ a \neq 0 \text{ e}$$

$$\delta(\operatorname{sen} t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\pi).$$

Para lidar com sinais descontínuos (e.g. delta de Dirac envolvendo um sinal com descontinuidade simples na origem), vale observar que $u(t).\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$, uma identidade no sentido *igualdade*

entre distribuições. Uma demonstração simples segue de: $u(t)\delta(t)=u(t)\dfrac{du(t)}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{du^2(t)}{dt}$. Mas $u^2(t)=u(t)$ e o resultado segue.

Assim, a distribuição $f(t).\delta(t)$ pode ser facilmente avaliada mesmo quando $f(t)$ não é contínua na origem. Separando a parte contínua de $f(t)$, denotada por $f_c(t)$, tem-se

$$f(t)=f_c(t)+[f(0+)-f(0-)]u(t).$$

Note que $f(0+)-f(0-)$ representa o salto, que só ocorre a partir da origem, $t=0$. Claro que $f_c(0-)=f(0-)$ e de modo que $f(0)=\dfrac{f(0+)+f(0-)}{2}$, como esperado, assumindo $u(0)=1/2$. Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_c(t)\delta(t)dt+[f(0+)-f(0-)]\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\delta(t)dt$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0-)+\frac{[f(0+)-f(0-)]}{2}.$$

Wiener generalizou a idéia de transformada de Fourier para sinais que não possuem transformadas de Fourier no sentido estrito, através do uso da distribuição de Dirac.



formatura em Engenharia Elétrica



Nobert Wiener (1894-1964).

Exercício 8

Calcular a integral de Fourier para os sinais que seguem e esboçar o espectro correspondente.

a) $f(t)=e^{-at}u(t)$ b) $f(t)=A$ c) $f(t)=sgn(t)$ d) $f(t)=u(t)$.

Solução:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-at}u(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-at}dt=\dfrac{1}{a}<+\infty$, logo, a transformada existe.

Usando diretamente a definição da transformada, tem-se:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+jw)t} dt = \frac{1}{-(a+jw)} \cdot e^{-(a+jw)t} \Big|_{0}^{+\infty} .$$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-(a+jw)t} = \lim_{t\to\infty} e^{-at} e^{-jwt} = 0$, tem - se $F(w) = \dfrac{1}{a+jw}$.

Constata-se que f não é par nem é ímpar, daí F não ser real ou imaginário puro.

Logo, $|F(w)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$ e $\varphi(w) = -\, tg^{-1}\left(\dfrac{w}{a}\right)$.

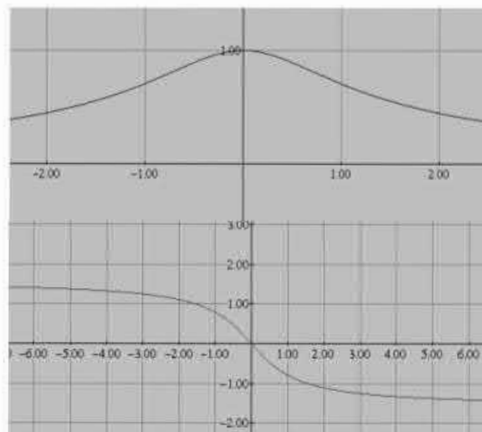


Figura 2.6 Espectro do sinal a (pulso exponencial unilateral): (a) magnitude e (b) fase.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |A| dt = +\infty$, logo a transformada só pode existir no limite.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-jwt} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} dt .$$

Lembrando que $\Im\, \delta(t) = 1$, a transformada inversa de 1 é

$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwt} dw = \delta(t)$, ou trocando as variáveis $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwt} dt = \delta(w)$.

Logo, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} dt = 2\pi\delta(w)$ e $A \leftrightarrow 2\pi A.\delta(w)$.

Resultado idêntico é obtido assumindo que $A = \lim_{T\to\infty} A\Pi\left(\dfrac{t}{2T}\right)$; Usando o resultado do exercício 5, segue-se que

$$F(w) = \lim_{T \to \infty} 2AT.Sa(wT) = 2\pi A \lim_{T \to \infty} \frac{T.Sa(wT)}{\pi} = 2\pi A\,\delta(w).$$

O espectro é mostrado a seguir e indica que apenas um valor DC está presente no sinal.

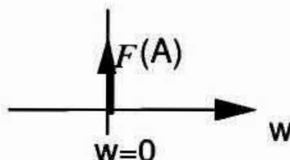


Figura 2.7 Espectro do sinal c (constante).

c) Por definição, $\mathrm{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & se \quad t > 0 \\ -1 & se \quad t < 0 \end{cases}$. Observando $\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\mathrm{sgn}(t)\,|\,dt = +\infty$, vê-se que é necessário escrever sgn(t) em termos do limite de funções absolutamente integráveis. Seja então:

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{a \to 0} e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t).$$

Do item a, $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + jw}$, e por escalonamento tem-se $e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - jw}$.

Assim, $\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \lim_{a \to 0} \frac{1}{a + jw} - \frac{1}{a - jw} = \frac{2}{jw}$, imaginário puro.

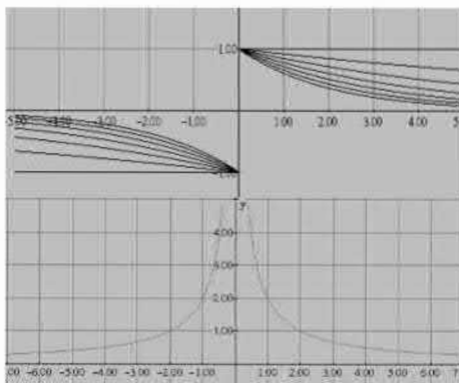


Figura 2.8 Espectro do sinal c (função sinal).

d) Novamente, $\int_{-\infty}^{+\infty} | u(t) | \, dt = +\infty$, e a definição não pode ser usada diretamente.

A transformada, se existir, ocorre no limite. Escrevendo $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Sgn(t)$, utilizando a linearidade do operador $\Im$ e os resultados b e c, tem-se:

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}.$$

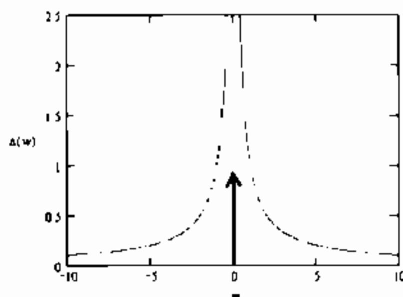


Figura 2.9 Espectro do sinal d (degrau unitário).

Exercício 9

Avaliar o espectro dos sinais e^{jwt}, $cos(w_c t)$ e $sen(w_c t)$ (não são sinais absolutamente integráveis).

Solução:

a) $F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jw_c t} e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(w_c - w)t} dt = 2\pi\delta(w - w_c)$, pelo exercício 8b.

b) Usando a relação $\cos(w_c t) = \dfrac{e^{jw_c t} - e^{-jw_c t}}{2}$, aplicando a linearidade da transformada e o resultado do item a, segue-se:

$$\cos(w_c t) \leftrightarrow \pi[\delta(w + w_c) + \delta(w - w_c)].$$

Como o sinal é par, o espectro é real e apenas a freqüência w_C está presente.

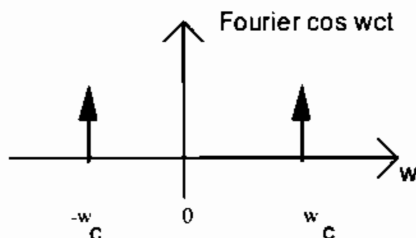


Figura 2.10 Espectro de um tom cossenoidal puro: apenas a freqüência w_c é (pontualmente) refletida no espectro.

Como o sinal não é absolutamente integrável, a transformada só pode ser avaliada no limite, exemplo:

$$\Im[\cos(w_c t)] = \lim_{k \to \infty} \int_{-k/2}^{k/2} \cos(w_c t) e^{-jwt} dt .$$

c) De modo inteiramente análogo, $\text{sen}(w_c t) = \dfrac{e^{jw_c t} - e^{-jw_c t}}{2j}$

resultando em

$$\text{sen}(w_c t) \leftrightarrow j\pi\left[\delta(w + w_c) - \delta(w - w_c)\right].$$

Como o sinal é ímpar, a transformada é imaginária e o fato que apenas a freqüência w_C revela-se no espectro.

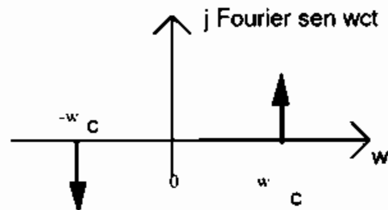


Figura 2.11 Espectro de um tom senoidal. Compare com a figura anterior.

A pergunta mais comum entre principiantes em análise espectral é: "O que realmente significa a presença de freqüências negativas no espectro? Existe algum significado físico?". A resposta é simples: um sinal físico (real) sempre apresenta simetria e as freqüências ocorrem aos pares (f_c e $-f_c$). Qual a freqüência do sinal $\cos w_C t$ ou $\text{sen}\, w_C t$?

Como $\cos(w_c t) = \cos(-w_c t)$, a freqüência poderia ser de modo indistinguível $-w_C$ ou $+w_C$ e para $\text{sen}(w_c t) = -\text{sen}(-w_c t)$, idem. Ocorre que

$\cos(w_c t) = \dfrac{e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}}{2}$ e ambas as freqüências estão simultaneamente presentes no sinal, com amplitudes idênticas e não há maneira de separá-las!

Um outro exemplo interessante de aplicação envolvendo impulsos de Dirac envolve distribuições discretas de probabilidade. A transformada de Fourier de uma distribuição de Poisson (**Siméon Poisson**) $f(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta(t-n)$, em que λ é uma constante real, é facilmente calculada. Usando o espectro do impulso de Dirac, $F(w) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} .e^{-jnw} = e^{\lambda(e^{-jw}-1)}$. Assim, $|F(w)| = \exp(\lambda(\cos w - 1))$ e $|\Theta(w)| = -\lambda sen w$.

2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA.

A transformada de Fourier foi obtida a partir da série de Fourier no caso limite, de modo a tratar sinais aperiódicos. No caso de sinais periódicos, qualquer função $f(t)$ verifica $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, mas a transformada pode ser avaliada no limite.

Como $f(t)$ é periódica, de período T, é possível expressá-la em série exponencial de Fourier.

$$f(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t} \qquad w_0 = 2\pi/T, \quad -\infty < t < +\infty.$$

A transformada deste sinal é dada por $F(w) = \Im \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n (e^{jnw_0 t})$.

Utilizando a linearidade do operador e o "par-transformada"

$$e^{jnw_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(w - nw_0)\text{, tem-se:}$$

$$F(w) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(w - nw_0).$$

Portanto, o espectro de um sinal periódico é composto por impulsos localizados na freqüência fundamental e harmônicas, sendo desta maneira um **espectro discreto**.

O uso da transformada de Fourier permite unificar o tratamento dado aos sinais periódicos ou não, na determinação do espectro.

2.3 A INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

A integral de convolução, produto de convolução ou simplesmente convolução é definida como $f_1(t)*f_2(t):=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ e é uma operação largamente utilizada na análise de sinais [OPPE&SCH 1975]. Qualquer rede linear (sistema linear) realiza uma integral desse tipo.

A convolução obedece as seguintes leis:

i) Comutativa $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

ii) Distributiva $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

iii) Associativa $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$ ■

A etimologia provável da palavra convolução advém do termo médico que se refere as "dobras complicadas" típicas do cérebro e pode ser memorizada como uma contração de "com evolução", uma vez que o cálculo das integrais impróprias é realizada evoluindo a variável τ desde $-\infty$ $a+\infty$. A convolução envolve o cálculo de um número infinito (não contável) de integrais impróprias, uma para cada valor de τ. Um dos sinais permanece fixo, $f_1(\tau)$, enquanto o outro desliza continuamente com origem em t.

Os produtos de funções ". e *" são relacionados via o operador $\Im$. Curiosamente, o elemento neutro do produto de convolução é a transformada de Fourier do elemento neutro do produto convencional (a função "sempre 1", identidade, $f(t)=1$).

Para avaliar a integral, normalmente recorre-se ao procedimento gráfico para auxiliar na determinação dos intervalos de integração. Como exemplo, considera-se a seguinte convolução $t\,u(t)*u(t)$.

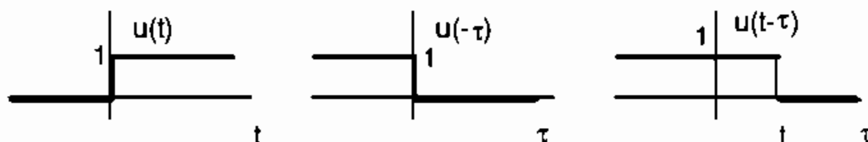
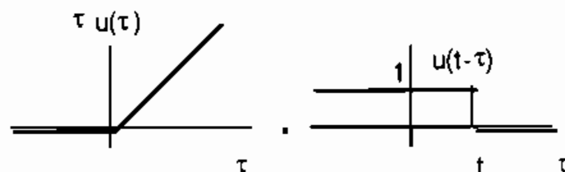


Figura 2.12 Transformações envolvidas na operação de convolução: uma ilustração.

O integrando corresponde ao produto a seguir,



em que t varia desde $-\infty$ até $+\infty$.

Logo, $t\,u(t) * u(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \int_0^t \tau d\tau = t^2/2 & t \ge 0 \end{cases} = \frac{t^2}{2}u(t)$.

A função resultante é contínua e este fato deve ser sempre usado para validar a solução obtida (exceto quando a convolução envolve impulsos).

Um outro exemplo bem interessante corresponde a convolução $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ entre duas funções porta.

Neste caso, usa-se uma variável de integração t' para evitar confusão.

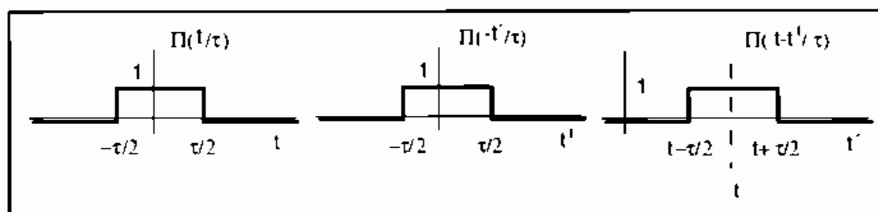
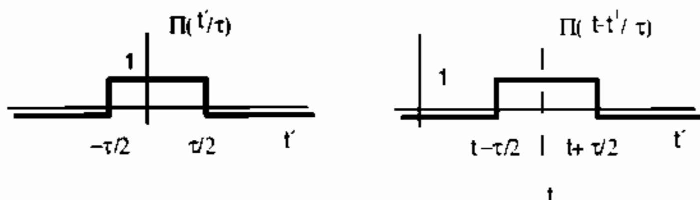


Figura 2.13 Transformações envolvidas na operação de convolução: uma ilustração.

Desta feita o integrando corresponde à função:



Então,

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)*\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}0 & \text{para } t+\frac{\tau}{2}\leq-\frac{\tau}{2}\\ \int_{-\tau/2}^{t+\tau/2}dt' = t+\tau & \text{para } -\frac{\tau}{2}\leq t+\frac{\tau}{2}\leq\frac{\tau}{2}\\ \int_{t-\tau/2}^{\tau/2}dt' = -t+\tau & \text{para } -\frac{\tau}{2}\leq t-\frac{\tau}{2}\leq\frac{\tau}{2}\\ 0 & \text{para } t-\frac{\tau}{2}\geq\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

O resultado é esboçado em seguida e $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)*\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)=\tau\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$.

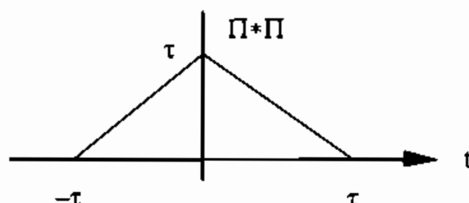


Figura 2.14 Convolução de duas funções porta de largura idêntica.

Com relação à derivação, valem as seguintes identidades:

1. $(f.g)' = f'.g + f.g'$

2. $(f*g)' = f'*g = f*g'$

Os resultados de maior aplicação da integral de convolução estão relacionados com a convolução envolvendo o impulso unitário. Empregando a definição do delta de Dirac, tem-se[18]:

$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)$, provido que f seja contínua na origem.

[18] Este resultado pode ser verificado no domínio f usando P8 (sec. 1.8).

Já na convolução de uma função arbitrária com um impulso ocorrido em um tempo t_O, obtém-se a mesma forma de onda deslocada apenas de t_O segundos, isto é,

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = f(t - t_0) .$$

Assim, vale o resultado:

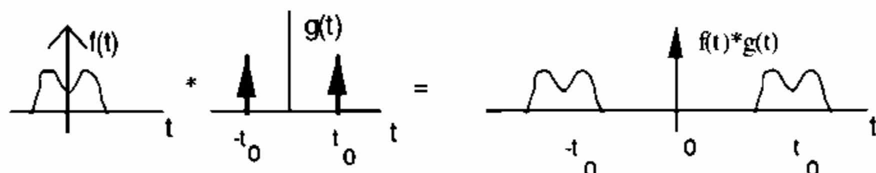


Figura 2.15 Convolução com o Impulso Unitário (deslocamento): O teorema da modulação.

Valem também propriedades envolvendo distribuições, tais como $\left(f(t) * \delta(t)\right)' = f'(t)$.

TEOREMA DE TITCHMARSH.

Se $f(t)$ e $g(t)$ são contínuas para $0<t<+\infty$ e não são identicamente nulas, então a sua convolução $f(t)*g(t)$ não é identicamente nula. ■

Um outro resultado interessante é o Teorema de **Bochner**. Para distribuições de probabilidade (funções não negativas de área finita sob a curva), vale:

TEOREMA DE BOCHNER.

$p(t) \leftrightarrow P(w)$ é uma densidade de probabilidade se e somente se $P(w)$ é positiva definida, i.e. para qualquer escolha de complexos $\{a_k\}_1^n$ e de freqüências $\{w_k\}_1^n$, tem-se $\sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} a_k a_{k'}^* P(w_k - w_{k'}) \geq 0$ ■

A transformada de Fourier de uma distribuição de Poisson $f(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\delta(t-n)$, em que λ é uma constante real, é facilmente calculada. Usando o espectro do impulso de Dirac, $F(w) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.e^{-jnw} = e^{\lambda(e^{-jw}-1)}$. Assim, $|F(w)| = \exp\left(\lambda(\cos w - 1)\right)$ e $|\Theta(w)| = -\lambda sen w$.

Dois dos resultados centrais da Teoria de Fourier estão relacionados à invariância da Energia nos domínios *t* e *f*; explicitamente: A energia de um sinal é preservada na mudança de domínio. Isto constitui os dois Teoremas de energia enunciados a seguir [PAPO 1962]:

TEOREMA DE PARSEVAL. (**Marc-Antoine Parseval des Chênes**). Seja $f(t) \leftrightarrow F(w)$ um sinal real, de energia finita. Então a energia do sinal pode ser calculada em qualquer dos domínios, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2\, df$. ■

Este resultado é generalizado através do

TEOREMA DA ENERGIA DE RAYLEIGH (ou Teorema de **Parseval-Plancherel**).

Sejam $f(t) \leftrightarrow F(w)$ e $g(t) \leftrightarrow G(w)$ sinais reais, de energia finita. Então se demonstra que [deO 2007, Ed. Brasport]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)G^*(f)df. \ ■$$

Um outro resultado bastante interessante envolve a relação "cruzada" entre sinais e espectros.

TEOREMA DA ENERGIA GENERALIZADO.

Seja $f(t) \leftrightarrow F(w)$ e $g(t) \leftrightarrow G(w)$ sinais reais, de energia finita. Então se demonstra que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)g(f)df$ ■

Esses resultados podem ser traduzidos em termos de propriedades envolvendo o produto interno entre sinais. Especificamente, eles descrevem como o operador $\Im$ atua sobre produtos internos:

P1. $<f,f> = <F,F>$ ou $<f,f> = <\Im f, \Im f>$
P2. $<f,g> = <F,G>$ ou $<f,g> = <\Im f, \Im g>$
P3. $<f,G> = <F,g>$ ou $<f,\Im g> = <\Im f,g>$.

O operador $\Im$ preserva produto interno. Uma vez preservado o produto interno, o operador preserva também a norma, energia, comprimentos e ângulos. Tal operador é chamado de isometria.

2.4 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sejam $f(t) \leftrightarrow F(w)$ e $g(t) \leftrightarrow G(w)$ pares de Transformada de Fourier.

P1. Simetria .... $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$

P2. Escalonamento .... $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{w}{a})$, $a \neq 0$

P3. Deslocamento no tempo .... $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-jwt_0} F(w)$

P4. Deslocamento na freqüência .... $f(t)e^{jw_0 t} \leftrightarrow F(w-w_0)$

P5. Diferenciação no tempo .... $D^n f(t) \leftrightarrow (jw)^n F(w)$

P6. Diferenciação na freqüência .... $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow D^n F(w)$

P7. Integração .... $\int_{-\infty}^{t} f(t')dt' \leftrightarrow \frac{1}{jw} F(w)$

P8. Convolução no tempo .... $f(t)*g(t) \leftrightarrow F(w).G(w)$

P9. Convolução na freqüência .... $f(t).g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(w)*G(w)$



P1-Usando a fórmula da inversão:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{jwt}\, dw = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{jxt}\, dx$$

Então, $2\pi . f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-jxt} dx$ e fazendo a troca de variável t por w,

tem-se, $2\pi . f(-w) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-jwx} dx$; portanto, $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$.

P2 - Da definição de transformada, $\Im[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-jwt} dt$.

Há dois casos a serem considerados: $a>0$ e $a<0$. Tomando $x = at$ e $dx = a.dt$.

Para $a > 0$ $\quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-jw\frac{x}{a}}\, dx = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{w}{a}\right),$

Para $a < 0$ $\quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)\, e^{-jw\frac{x}{a}}\, dx = \frac{1}{-a} \cdot F\left(\frac{w}{a}\right).$

Logo, $\quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right).$

P3 - Tomando-se a transformada de $f(t\text{-}t_0)$,

$$\Im[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0).e^{-jwt}dt\,.$$

Efetuando-se a mudança de variável $x=t\text{-}t_0$; $dx = dt$, chega-se a:

$$f(t-t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jw(x+t0)}dx = e^{-jwt0}F(w)\,.$$

P4 - Similar ao item anterior.

P5 - A fórmula de inversão é $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{jwt}dw$, portanto,

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}.\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{jwt}dw\,.$$

Admitindo-se que é possível trocar a ordem da derivação & integração,

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jwF(w)e^{jwt}dw\,,$$ se a integral existe.

Assim: $\frac{df}{dt} \leftrightarrow jwF(w)\,.$

A demonstração pode ser concluída usando o princípio da indução finita, supondo que

$\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} \leftrightarrow (jw)^{n-1}F(w)$ isto é, que $\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(jw)^{n-1}F(w)e^{jwt}dw\,.$

Diferenciando a equação acima e supondo que a ordem das operações $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}$ comuta, tem-se

$\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(jw)^n F(w)e^{jwt}dw$ e a dedução está concluída.

Observação:

Não é garantida a existência da transformada, mas se ela existe, é dada por $(jw)^n F(w)$.

P6 - Similar ao item anterior.

P7 - Definindo-se a função $\varphi(t) := \int_{-\infty}^{t} f(t')dt'$, a sua transformada de Fourier é

$$\Im[\varphi(t)] = \Phi(w).$$

Logo $\Phi(w)$ existe se $\varphi(t)$ é absolutamente integrável , isto é, se

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t')|\, dt' < +\infty$. Isto só é possível se $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, ou seja, quando $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')dt' = 0$.

Utilizando P5, $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(w) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} \leftrightarrow jw\Phi(w)$.

Mas $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} f(t')dt' = f(t) \leftrightarrow F(w)$.

Portanto, $F(w)$=j$w\phi(w)$. Então, $\Phi(w) = \frac{F(w)}{jw}$, provido que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')dt' = F(0) = 0.$$

Assim, $\frac{F(w)}{jw}$ é limitada em w=0 e $\Phi(0) = \lim_{w\to 0} \frac{F(w)}{jw}$, de modo que a transformada da integral é $\int_{-\infty}^{t} f(t')dt' \leftrightarrow \frac{F(w)}{jw}$, provido que $F(0)$=0.

Admitindo-se que $F(0) \neq 0$, a transformada só pode existir no limite, pois $\varphi(t)$ não é absolutamente integrável. Neste caso mostra-se que

$$\int_{-\infty}^{t} f(t')dt' \leftrightarrow \frac{F(w)}{jw} + \pi F(0)\delta(w).$$

P8 - O produto de convolução $f_1(t)$*$f_2(t)$ é expresso por

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$ e sua transformada vale

$$\Im[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau dt.$$

Para sinais de energia finita $E_i < +\infty$, i=1,2 é possível inverter a ordem de integração de acordo com o teorema [FIGU 1977]:

TEOREMA (FUBINIZINHO): Se $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx < +\infty$,

Então $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx$. ■



Guido Fubini (1879-1943).

Precauções devem ser tomadas na troca da ordem de uma integração dupla (ou duplo somatório). A *finitude* das integrais iteradas não assegura que a integral existe (no teorema de Fubini, usam-se integrais sobre $|f|$ e não sobre f). Por exemplo, para

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & 0 < x, y \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

as integrais $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx$ ambas existem ($-\pi/4$ e $\pi/4$, respectivamente), mas a integral de $f(.,.)$ não existe, nem a ordem pode ser invertida.

Invertendo-se a ordem de integração, a transformada pode ser determinada:

$$\Im[f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} f_2(t-\tau)dtd\tau \ .$$

Fazendo-se a mudança de variável $x=t-\tau$, segue-se $dx=dt$,

$$\Im[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(w).e^{-jw\tau} f_1(\tau)d\tau = F_2(w).\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\tau} f_1(\tau)d\tau \ .$$

Portanto, $f_1(t)*f_2(t) \leftrightarrow F_1(w).F_2(w)$.

P9 - Similar ao item anterior.

Observação: A demonstração de P7 pode ser realizada com o auxílio de P8;

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')u(t-t')dt'=\int_{-\infty}^{t}f(t')dt':=\varphi(t).$$

Logo, $f(t)*u(t)\leftrightarrow F(w)\left[\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)\right]$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{t}f(t')dt'\leftrightarrow\frac{F(w)}{jw}+\pi F(0)\delta(w).$$

__**Exercício 10**__

Calcular a transformada de Fourier de um pulso Gaussiano,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

__Solução:__ Da definição, lembrando que $f(t)$ é par, $F(w)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}\cos(wt)dt$. Derivando-se a função $F(w)$,

$$F'(w)=\frac{dF}{dw}=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t.e^{-t^2/2}sen(wt)dt$$, se $F'(w)$ existe.

Mas: $|F'(w)|\le\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t.e^{-t^2/2}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}<+\infty$ e conseqüentemente $F'(w)$ existe.

Resolvendo a integral por partes:

$u = sen(wt)$ $\quad\quad du = w\cos(wt)\,dt$

$dv = t\,e^{-t^2/2}\,dt$ $\quad\quad v = -e^{-t^2/2}$

$$F'(w) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{sen(wt)\,e^{-t^2/2}\Big|_0^{+\infty} + w\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}\cos(wt)\,dt\right\}$$

donde

$$F'(w) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}w\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}\cos(wt)\,dt = -wF(w).$$

Logo a transformada $F(w)$ obedece à equação diferencial $F'(w)+w.F(w)=0$, com a condição inicial $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt = 1$ (integral da curva normal usada em probabilidade e estatística).

O fator integrante é $I = e^{\int w dw} = e^{w^2/2}$ e $(F(w) e^{w^2/2})' = 0$.

$\Rightarrow F(w) = k\, e^{-w^2/2}$. Utilizando-se a condição inicial, vem $F(w) = e^{-w^2/2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \leftrightarrow e^{-w^2/2}.$$

A transformada de Fourier de um pulso Gaussiano é ainda um pulso Gaussiano! Devido a sua **característica auto-recíproca**, o sinal Gaussiano ocupa uma posição de destaque na teoria das transformadas e em análise. (veja também prob. 73).

Definição:
Um sinal $f(t)$ é dito ser banda limitada se existe uma freqüência w_m tal que $\Im f(t) = F(w)=0$, para $|w|\geq w_m$. De modo similar, um sinal é dito tempo limitado se e só se existe um instante t_m tal que $f(t) = 0$ para $|t|\geq t_m$.


Pode ser demonstrado rigorosamente que não é possível obter-se um sinal *simultaneamente* limitado no tempo e na freqüência. A proposição apresentada a seguir oferece um argumento nesta direção. Os sinais físicos são estritamente limitados no tempo, mas o espectro obtido pode ser virtualmente nulo para freqüências elevadas. Assim, para propósito práticos, muitos sinais são considerados como banda limitada. (veja [WOZ&JAC 1967]). Uma das proposições comumente citadas em cursos envolvendo sinais, quase sempre sem prova, é comentada a seguir [SLE 1976].

Proposição [deO & RAM 1995].
Sinais determinísticos não podem ser simultaneamente limitados no tempo e na freqüência. ■

Esboço da prova:

Um sinal $f(t)$ estritamente limitado na freqüência, com banda limitada em w_m, pode ser escrito sob a forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_m}^{+w_m} F(w)\, e^{jwt}\, dw,$$

em que $F(w)$ é sua transformada de Fourier (suposta existente). A demonstração é feita por *reductio ad absurdum*.

Suponha que $f(t)$ é também estritamente limitado no tempo. Isto significa que $\exists(t_m \in \mathbb{R}|\ f(t)=0\ (\forall|t|\geq t_m)$. Obviamente, $f(t) = f(t).\Pi\left(\frac{t}{2t_m}\right)$, conforme a ilustração a seguir.

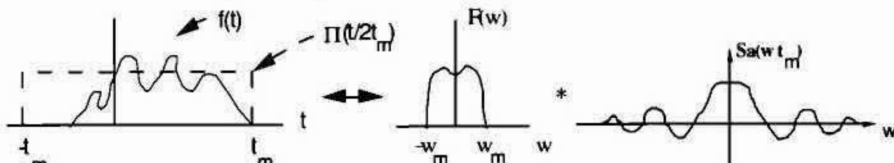


Figura 2.16 Inexistência de sinais limitados simultaneamente no tempo e na freqüência.

Logo, pela propriedade **P9** da transformada de Fourier,

$$F(w) = (2\pi)^{-1}.F(w) * 2t_m Sa(wt_m).$$

Claramente, em geral, $F(w) * Sa(wt_m) \neq 0$, $-\infty < w < +\infty$.

Esta convolução resulta, portanto, em um sinal F(w) que **não** é estritamente banda limitada, o que contradiz a hipótese.

Q.E.D.

Um outro resultado bastante útil da teoria de Fourier é a fórmula da soma de Poisson, relacionando amostras do sinal do domínio t e amostras no domínio w:

FÓRMULA DE POISSON PARA A SOMA.

Se $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(w)$, fixado $T>0$, arbitrário, com $w_0 = 2\pi / T$, então:

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(nw_0)$ e em particular, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(2\pi n)$. ■



Siméon Poisson (1781-1840).

2.5 O PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE SINAIS

Vale citar também uma formulação para o **Princípio da Incerteza de Heisenberg** (tempo × freqüência), desenvolvida por Gabor[19] [GAB 1946]. Trata-se de uma relação entre a duração efetiva de um sinal e sua banda passante efetiva, obtida no contexto de sinais determinísticos.



Werner Heisenberg (1901-1976)



Dennis Gabor (1900-1978)

Seja $f(t)$ um sinal de energia finita, não necessariamente real, possuindo transformada $F(w)$. Definem-se os momentos temporais e freqüenciais pelas seguintes relações:

$$\overline{t^n} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)t^n f(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t)dt} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mid f(t)\mid^2 dt, \text{ e}$$

$$\overline{w^n} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(w)w^n F(w)dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(w)F(w)dw} = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} w^n \mid F(w)\mid^2 dw.$$

Considere então a seguinte analogia com a teoria das Probabilidades: O integrando $|f(t)|^2/E$ denotando uma densidade de energia no tempo, em que a energia E é um fator de normalização para que a integral da densidade seja unitária. É usual trabalhar-se com a densidade espectral de energia $\psi(w)=|F(w)|^2$, cuja integral definida em dado intervalo de freqüências fornece a energia do sinal nesta faixa do espectro.

A duração (respectivamente banda passante) efetiva de um sinal $f(t)$ (respectivamente $F(w)$) pode ser definida via:

---

[19] **Dennis Gabor** (Gábor Dénes), Prêmio Nobel de Física, 1971, inventor da Holografia.

$$\Delta t := \left[2\pi \overline{(t-\bar{t})^2} \right]^{1/2} \text{ Duração r.m.s.,}$$

$$\Delta f := \left[2\pi \overline{(f-\bar{f})^2} \right]^{1/2} \text{ Banda r.m.s., } \blacksquare$$

Δt e Δf correspondem aos desvios padrões (i.e., raiz quadrada da variância), medidas clássicas de espalhamento.

Aplicando argumentos típicos da mecânica quântica [GAB 1946], Gabor provou uma relação de incerteza do tipo:

$$\Delta t \, . \, \Delta f \geq 1/2,$$

estabelecendo que t e f não podem ser *simultaneamente* definidos de forma exata. Os valores de Δt e Δf são freqüentemente referidos como largura de pulso equivalente e banda passante equivalente, respectivamente.

FORMULAÇÃO ALTERNATIVA

O princípio da incerteza pode ser estabelecido através de uma formulação alternativa [BENE *et al*. 1987]. A fim de limitar o sinal no tempo e na freqüência, considere um para $f(t) \leftrightarrow F(w)$, fixados T e Ω. Sejam então as frações:

$$\alpha := \sqrt{\frac{\int_{-T}^{T} f^2(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt}} \text{ e } \beta := \sqrt{\frac{\int_{-\Omega}^{\Omega} |F(w)|^2 \, dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 \, dw}} .$$

Claramente, $\alpha \leq 1$ e $\beta \leq 1$. Sem perda de generalidade, pode-se considerar sinais de energia normalizada E=1. Então:

$$\alpha^2 = \int_{-T}^{T} f^2(t)dt \text{ e } \beta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |F(w)|^2 \, dw .$$

O princípio da incerteza estabelece que, fixada uma das duas quantidades α ou β, a outra deve ser mantida abaixo de certo valor máximo, dependendo do produto $T\Omega$.

Fixado α, há um sinal para o qual um máximo β é obtido. Alternativamente, fixado β, a um sinal para o qual um máximo valor de α é atingido. Se o sinal é banda limitada em Ω, então β=1 e α<1. Qual o maior valor de α, e para que função ele é atingido? Em termos de otimização ($f(t) \leftrightarrow F(w)$), o problema é colocado sob a forma:

$$\begin{array}{lcl} MAX \quad \alpha^2 & & MAX \quad \int_{-T}^{+T} f^2(t)dt \\ s.t. & \Leftrightarrow & s.t. \\ \beta = 1 & & \int_{-\Omega}^{+\Omega} |F(w)|^2 \, dw = 2\pi \end{array}$$

A resposta para sinais com limitação foi encontrada por **Slepian** e **Pollack** [SLE&POL 1961] e são as funções de onda prolate esferoidais[20]. Elas obedecem a equação integral (são as autofunções da transformação envolvendo a função $Sa(.)$):

$$\lambda\phi(t) = \int_{-T}^{T} \phi(\tau) Sa\big(\Omega(t-\tau)\big) d\tau \,.$$

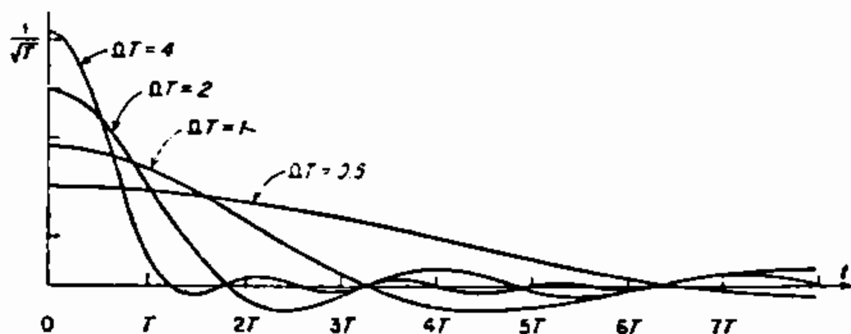


Figura 2.17 Funções Prolate Esferoidais.

Essas funções $\phi(t)$ são relacionadas com soluções da equação diferencial:

$$(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} + \left(\chi - c^2t^2\right)u = 0\,, \quad t \in [-1,1].$$

---

[20] Há um problema semelhante: se o sinal é tempo limitado em T, então α=1 e β<1. Qual o maior valor de β, e para que sinal ele é atingido? A solução também é dada pelas funções "prolate esferoidais".

2.6 AUTOFUNÇÕES DE FOURIER, PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE GABOR

Extrato de um artigo de **L. SOARES**, **H.M. de Oliveira** *et al.*

A transformada de Fourier é freqüentemente interpretada como um operador linear $\Im$. Uma questão interessante neste contexto consiste em encontrar as chamadas "autofunções" (*eigenfunctions*) na linguagem dos operadores [HERS 1964], [SOKO&RED 1966], [PEI&DIN 2002]. Seja V um espaço vetorial munido de uma transformação linear, T:V $\rightarrow$ V, $v \mapsto T(v)$. Sob a transformação linear T, os autovetores são as soluções de $T\{v\}=\lambda v$, o que corresponde aqui a $\Im\{f(t)\}=\lambda.f(w)$ para algum $f\in L^2(\boldsymbol{R})$, λ sendo um escalar. Eles constituem uma classe admirável de funções, as quais preservam o formato sob a transformação de Fourier: Ambos o sinal e o seu espectro (representação no tempo e na freqüência) têm o mesmo formato.

Na representação conjunta tempo-freqüência [COH 1995], [QIA&CHE 1999] tal característica deve representar um "bom" balanceamento entre os dois domínios. É muito bem conhecido que o pulso Gaussiano é um sinal cujo formato é preservado sob o operador Fourier:

$$e^{-t^2/2} \leftrightarrow \sqrt{2\pi}e^{-w^2/2}. \qquad (1)$$

Isto pode ser prontamente deduzido escrevendo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-jwt}dt = F(w)$. Derivando esta equação e usando integração por partes, encontra-se $F'(w)=-wF(w)$. A solução da equação diferencial $F'(w)+w.F(w)=0$ com condição inicial $F(0)=1$ é $F(w)=e^{-w^2/2}$. Segue-se então que $\lambda=\sqrt{2\pi}$. A questão é: Há outras autofunções? Este tópico é abordado na próxima seção. Relevante manter em mente que os resultados apresentados aqui são deliberadamente *non nova, sed nove* [McC&PAR 1972].

Sinais de formato-invariante: *Eigenfunctions* do Operador Fourier

Seja $\mathcal{E}$ (respectivamente $\mathcal{O}$) o funcional que extrai a parte par (respectivamente parte ímpar) de um sinal.

Proposição 1. Seja $f(t) \leftrightarrow F(w)$ um "par-transformada" de Fourier arbitrário. Então o sinal

$$h(t) := \sqrt{2\pi}\mathcal{E}[f(t)] + \mathcal{E}[F(t)]$$

é um invariante sob Transformada de Fourier. Além disso,

$$\Im\{h(t)\} = \sqrt{2\pi}\, h(w).$$

Prova:

Segue da definição de $h(.)$ que

$$2h(t) = \sqrt{2\pi}[f(t) + f(-t)] + [F(t) + F(-t)]. \quad (2)$$

Tomando-se a Transformada de Fourier,

$$2H(w) = \sqrt{2\pi}[F(w) + F(-w)] + [2\pi f(-w) + 2\pi f(w)] \quad (3)$$

e a prova é concluída. ■

Corolário. Cada função par $f(t) \leftrightarrow F(w)$ induz um invariante-Fourier $h(t) = \sqrt{2\pi} f(t) + F(t)$ ■

Por exemplo, os sinais $h_1(t) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{1+t^2} + \pi e^{-|t|}$, $h_2(t) = \sqrt{2\pi}\,|t| - \frac{2}{t^2}$ têm espectro com formato similar ao sinal no tempo. Um exemplo extra e notável é

$$sec\,h\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}t\right) \leftrightarrow \sqrt{2\pi}\, sec\,h\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}w\right). \quad (4)$$

Proposição 2. Seja $f(t) \leftrightarrow F(w)$ um "par-transformada" arbitrário. Então o sinal $h(t) := \sqrt{2\pi} j\mathcal{O}[f(t)] - j.\mathcal{O}[F(t)]$ é um invariante sob transformada de Fourier. Ademais, $\Im\{h(t)\} = -j\sqrt{2\pi}\, h(w)$.

Prova: Similar àquela da proposição 1. ■

Corolário. Cada função ímpar $f(t) \leftrightarrow F(w)$ induz um invariante-Fourier $h(t) = j\sqrt{2\pi} f(t) - F(t)$ ■

Tabela II.2 Diversos sinais invariantes (autofunções de Fourier), cujo espectro tem formato idêntico ao sinal original (formatação invariante à transformada de Fourier).

Função	Autovalor
$f_1(t) = e^{-t^2/2}$	$\lambda_1 = \sqrt{2\pi}$
$f_2(t) = \dfrac{4}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \lvert t \rvert}}$	$\lambda_2 = \sqrt{2\pi}$
$f_3(t) = \operatorname{sech}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cdot t\right)$	$\lambda_3 = \sqrt{2\pi}$
$f_4(t) = t \cdot e^{-t^2/2}$	$\lambda_4 = -j \cdot \sqrt{2\pi}$

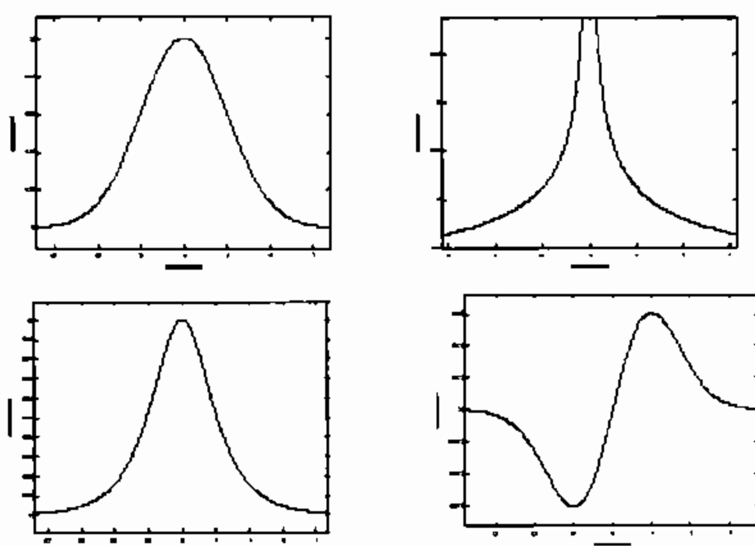


Figura 2.18 Diversos sinais invariantes (autofunções de Fourier), cujo espectro tem formato idêntico ao sinal original (formatação invariante à transformada de Fourier).

Focaliza-se agora uma classe importante e particular de invariantes do operador Fourier, a qual gera um conjunto ortogonal completo. Para iniciar, denote-se por $\mathcal{E}_g$ a classe de autofunções do operador Fourier definidas de acordo com a seguinte:

Proposição 3. Um sinal $f(t)$ pertence a $\mathcal{E}_g$ *se e só se* o sinal f satisfaz a equação diferencial $f''(t)-t^2f(t)=\kappa f(t)$, para algum escalar $\kappa\in \boldsymbol{C}$.

Prova:

$(\Rightarrow)$

$$f(t)\leftrightarrow \lambda f(w) \qquad \text{(hipótese).}$$

As propriedades de diferenciação no tempo e na freqüência fornecem:

$$f''(t)\leftrightarrow (jw)^2\lambda f(w),$$
$$(-jt)^2 f(t) \leftrightarrow \lambda f''(w). \tag{5}$$

Somando ambos os membros[21], chega-se a

$$f''(t)-t^2f(t) \leftrightarrow \lambda[f''(w) -w^2 f(w)]. \tag{6}$$

Assim, o sinal $f''(t)-t^2f(t)$ também mantém o formato de espectro, provido que f preserva seu formato. Portanto, $f''(t)-t^2f(t)\in \mathcal{E}_g$, i.e. procuram-se sinais tais que $f''(t)-t^2f(t)=\kappa f(t)$, desde que eles têm autovalores idênticos.

$(\Leftarrow)$

O sinal $f(t)$ satisfaz a equação diferencial $f''(t)-t^2f(t)=\kappa f(t)$, $\kappa\in \boldsymbol{C}$. (Hipótese). Tomando-se $\Im$,

$$(jw)^2F(w)+F''(w)=\kappa\lambda F(w), \tag{7}$$

de maneira que $F''(w)-w^2F(w)=\kappa\lambda F(w)$, i.e., seu espectro também obedece a mesma equação diferencial. Assim, f e F têm formato idêntico, desde que eles são soluções da mesma equação diferencial. ■

A equação chave para sinais de formato-invariante é assim $f''(t)-t^2f(t)=\kappa f(t)$. Tentemos soluções da forma

$$f(t) = p(t).e^{-t^2/2}. \tag{8}$$

[21] N.B. subtraindo: $f''(t)+t^2f(t) \leftrightarrow -\lambda[f''(w) +w^2f(w)]$.

Portanto,

$$\left[p(t).e^{-t^2/2}\right]'' - t^2 p(t).e^{-t^2/2} = \kappa p(t).e^{-t^2/2}. \tag{9}$$

Após simples manipulações algébricas, é possível deduzir:

$$p''(t) - 2tp'(t) - [\kappa+1]p(t) = 0. \tag{10}$$

Uma equação diferencial padrão que apresenta a forma acima [ABRA&STE 1968] é

$$p''(t) - 2tp'(t) + 2np(t) = 0\ ,\ n \text{ inteiro}. \tag{11}$$

Assim, para uma escolha conveniente de $\kappa = -(2n+1)$ (autovalores), as soluções $p(t)$ são exatamente polinômios de **Hermite** [ABRA&STE 1968], os quais formam um sistema ortogonal completo (capítulo 1).

$$p(t) = H_n(t). \tag{12}$$

($H_0(t)=1$, $H_1(t)=2t$, $H_2(t)=-2+4t^2$, $H_3(t)=-12t+8t^3$, $H_4(t)=12-48t^2+16t^4$ etc.)

Proposição 4. Os possíveis autovalores (*eigenvalues*) da transformada de Fourier são as quatro raízes da unidade ($\pm 1, \pm j$) vezes $\sqrt{2\pi}$.

Prova.

Denote por $\Im^{(n)}$ o operador correspondente a iterar n vezes o operador $\Im$. Seja $t \leftrightarrow w \leftrightarrow w' \leftrightarrow \Omega$ os domínios "Fourier" para a transformação iterada (a cada transformação, o domínio é modificado). Observe que ($\forall f \in E_g$)

$$\Im^{(2)}\{f(t)\}=2\pi f(-w') \text{ e } \Im^{(4)}\{f(t)\}=4\pi^2 f(\Omega). \tag{13}$$

Mas

$$\Im^{(2)}\{f(t)\}=\lambda^2 f(w') \text{ e } \Im^{(4)}\{f(t)\}= \lambda^4 f(\Omega). \tag{14}$$

de (13) e (14) segue-se que $\lambda/\sqrt{2\pi} \in C$ tem ordem 4. ■

Concluí-se que $\left\{\psi_n(t) := H_n(t).e^{-t^2/2}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ são sinais "formato-invariante" sob o operador Fourier, associados com os autovalores $\lambda_n = (-j)^n \sqrt{2\pi}$. Portanto,

$$H_n(t).e^{-t^2/2} \leftrightarrow (-j)^n \sqrt{2\pi} H_n(w).e^{-w^2/2}. \tag{15}$$

As funções de **Gabor** podem ser visualizadas em http://www.cs.rug.nl/~imaging/simplecell.html. Outra interpretação pode ser obtida lembrando a fórmula de Rodrigues [ABRA&STE 1968]

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \cdot \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} . \qquad (16)$$

A equação diferencial de 2ª-ordem verificada por sinais invariantes é

$$y''+(2n+1-x^2)y=0. \qquad (17)$$

A equação diferencial (17) é exatamente a célebre equação de Schrödinger para o oscilador harmônico [BEI 1994].

Conseqüências no plano Tempo-Freqüência

Certas conseqüências das *eigenfunctions* do operador Fourier no plano conjunto tempo-freqüência [COH 1995], [OLI&BAR 2000] são examinadas neste capítulo.

Seja $f(t)$ um sinal de energia finita E, com transformada $F(w)$. Os momentos temporais e freqüenciais de f são definidos por:

$$\overline{t^n} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) t^n f(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) f(t) dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n |f(t)|^2 \, dt$$

$$\overline{w^n} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(w) w^n F(w) dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(w) F(w) dw} = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} w^n |F(w)|^2 \, dw$$

■

Por analogia com a Teoria de Probabilidades, o termo $|f(t)|^2/E$ denota uma densidade de energia "domínio do tempo", em que E é um fator de normalização de modo a garantir que a integral total da densidade vale a unidade. É usual lidar com a densidade espectral de energia $G(w)=|F(w)|^2$, cuja integral sobre uma banda de freqüências fornece o conteúdo de energia do sinal dentro desta banda. Supõe-se a seguir, sem perda de generalidade, que $E=1$ (sinais de energia normalizada).

A *duração efetiva* (respectivamente *largura de banda efetiva*) de um sinal $f(t)$ (respectivamente $F(w)$) é originalmente definida via:

$$\Delta t := \sqrt{\left[2\pi\overline{(t-\bar{t}\,)^2}\right]} \quad \text{duração r.m.s.,} \tag{18a}$$

$$\Delta f := \sqrt{\left[2\pi\overline{(f-\bar{f}\,)^2}\right]} \quad \text{banda passante r.m.s.,} \tag{18b}$$

Δt e Δf correspondem ao desvio padrão (i.e., medidas de espalhamento). Contudo, definições comuns e mais fáceis de manipular são

$$\Delta_t := \sqrt{\overline{(t-\bar{t}\,)^2}} \qquad \Delta_w := \sqrt{\overline{(w-\overline{w})^2}}\,. \tag{19}$$

Obviamente[22], $\Delta_t = \Delta t/\sqrt{2\pi}$, $\Delta_w = \sqrt{2\pi}.\Delta f$.

Revisando o Princípio de Gabor

Aplicando argumentos da mecânica quântica [BEI 1994], **Gabor** [GAB 1946, 1953] deduziu uma relação de incerteza hoje conhecida como princípio de Gabor-Heisenberg para sinais: $\Delta t.\Delta f \geq 1/2$, provando assim que espalhamentos no tempo e na freqüência não podem ser exatamente medidos desacopladamente. Para uma análise mais moderna, envolvendo wavelets, consulte [BATT 1997], [BAL 1998].

O princípio de **Gabor-Heisenberg** estabelece uma cota inferior sobre o produto $\Delta t.\Delta w$ (ou $\Delta_t.\Delta_w$)

$$\Delta_t \,.\, \Delta_w \geq \frac{1}{2}\,. \tag{20}$$

Proposição 5. O limite inferior de Gabor só é atingido pelo primeiro dos sinais invariantes (*eigenfunctions* do operador $\mathfrak{I}$).

---

22 $\Delta_w^2 = 2\pi\Delta f^{\,2} = 2\pi.\left[2\pi\overline{(f-\bar{f}\,)^2}\right] = \overline{(w-\overline{w}\,)^2}$

Esboço da prova.

De (20), a cota é alcançada com igualdade *iff* $f'(t)$=k$t.f(t)$. Esta condição pode ser interpretada com segue: 'derivada no domínio tempo '≡' derivada no domínio freqüência'. Portanto,

$$f''(t)=k[f(t)+t.f'(t)]=kf(t)+k^2t^2f(t) \text{ ou} \tag{21}$$

$$f''(t)-(kt)^2f(t)=kf(t). \tag{22}$$

$f''(t)-k(1+kt^2)f(t)=0$. As únicas soluções em $\mathcal{E}_g$ correspondem a k=±1, i.e., $f''+(1-t^2)f=0$ ou $f''-(1+t^2)f=0$. ■

Proposição 6. Qualquer sinal real $f(t) \leftrightarrow F(w)$ tal que $f, f', F, F' \in L^2(\boldsymbol{R})$, tem resoluções finitas.

Prova. Aplicando o Teorema de **Parseval-Plancherel** [ABRA&STE 1968], obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [jtf(t)][jtf(t)]^* dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F'(w)|^2\, dw, \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |F(w)|^2\, dw = \int_{-\infty}^{+\infty} [jwF(w)][jwF(w)]^* dw = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(t)]^2 dt. \tag{24}$$

Conseqüentemente,

$$\Delta_t^{\,2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F'(w)|^2\, dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2\, dw} < +\infty\,, \tag{25}$$

$$\Delta_w^{\,2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt} < +\infty\,. \tag{26}$$

■

Δ é expresso pela raiz quadrada da razão entre a energia do sinal derivada e aquela do próprio sinal. Assim, a resolução dada pela equação (4) para o sinal *sech*(.) (invariante à transformada de Fourier) é

$$\Delta_t = \Delta_w = \sqrt{\pi/6} \cong 0{,}5235987766 \tag{27}$$

uma vez que $\int_{-\infty}^{+\infty} sech^2(\zeta)d\zeta = 2$, $\int_{-\infty}^{+\infty} tgh^2(\zeta).sech^2(\zeta)d\zeta = \frac{2}{3}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2.\zeta}{\pi}\right)^2 sech^2(\zeta)d\zeta = \frac{2}{3}. \tag{28}$$

Proposição 7. [GAB 1946]. A célula de incerteza tempo-freqüência de autofunções de Fourier[23] $\{\psi_n(t)\}$ alcançam apenas valores quantizados da cota inferior do limitante de **Gabor-Heisenberg**, i.e.

$$\Delta t \,.\, \Delta f = \frac{1}{2}\,.\,(2n+1), \qquad (27a)$$

$$\Delta_t \,.\, \Delta_w = \frac{1}{2}(2n+1). \qquad (27b)$$

■

É por esta razão que as funções de Gabor são relevantes em certos problemas (e.g. [OKA 1998]).

2.7 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DE SINAIS DETERMINÍSTICOS

O tratamento espectral via transformada é usual para sinais de energia, entretanto há muitos sinais de interesse os quais não são de quadrado integrável, i.e., a integral correspondente à energia, diverge. Nestes casos, deve-se examinar a Densidade Espectral de Potência. A potência dissipada por um sinal (tensão) $f(t)$ é dada por

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt \quad ■$$

A função truncada $f_T(t)=f(t)\Pi(t/\tau)$ é um sinal de energia, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t)dt < +\infty$. Então existe a transformada e $f_T(t) \leftrightarrow F_T(w)$.

$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T^2(w)|df$. Daí, $\int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T^2(w)|df$. A potência dissipada pelo sinal $f(t)$ pode ser expressa por P=$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T^2(w)|}{T} df$.

---

[23] $\psi_n(t) = H_n(t)exp\left(-t^2/2\right)exp\left(jw_0t+\phi_0\right)$.

Define-se a *Densidade Espectral de Potência* de um sinal através da relação:

$$S_f(w) := \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T^2(w)|}{T} \quad \text{(unidades de Watts/Hz).}$$

A função de autocorrelação (ACF) é definida pela expressão $\Re_f(\tau) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t+\tau)dt$.

Escrevendo a integral envolvendo $f(t)$ em termos do sinal truncado $f_T(t)$, tem-se:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)f_T(t+\tau)dt = f_T(\tau) * f_T(-\tau).$$

Dividindo-se ambos os membros da igualdade por T, no limite $T\to\infty$ e tomando-se a transformada de Fourier em ambos os membros, obtém-se a relação entre a autocorrelação e a densidade espectral de potência:

$$\Im\, \Re_f(\tau) = S_f(w). \quad ■$$

2.8 A DFT E A FFT

Em casos práticos, a avaliação da transformada de Fourier não é feita utilizando os procedimentos até agora descritos. A maioria das vezes não se dispõe de uma expressão analítica para a função que se deseja analisar o espectro. A transformada discreta de Fourier (DFT) é muito usada no estudo do espectro de sinais e é determinada numericamente com o auxílio de computador digital [BRI 1974], [BRA 1978], [DELL 1994].

Considerando-se N amostras do sinal no domínio do tempo, denotadas $f(k)$, k=0,1,2,...,N-1, a DFT é dada por um conjunto de N amostras do sinal no domínio da freqüência, denotadas por $F(n)$, n= 0,1,2,...,N-1 e definidas por[24]

$$F(n) := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right).$$

---

[24] Compare com a definição da Transformada de Fourier fazendo as seguintes analogias:
$k \leftrightarrow t \quad n/N \leftrightarrow f \quad \Sigma\forall k \leftrightarrow \Sigma\forall t.$

Diz-se então que $f(k) \leftrightarrow F(n)$ formam um par transformada e a re-obtenção do sinal no domínio do temporal pode ser feita usando a transformada inversa discreta de Fourier:

$$f(k)=\sum_{n=0}^{N-1}F(n)\exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right),$$

como é demonstrado a seguir.

$$\sum_{n=0}^{N-1}F(n)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f(l)\exp\left(-\frac{j2\pi l.n}{N}\right)\right]e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}f(l)\exp\left(-\frac{j2\pi n(k-l)}{N}\right).$$

Invertendo-se a ordem dos somatórios desta equação, tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{N-1}F(n)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f(l)\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi n}{N}(k-l)}\right].$$

O somatório inverso pode ser calculado empregando a relação $1+z+z^2+...+z^{N-1}=\frac{1-z^N}{1-z}$, válida para qualquer complexo $z\neq 1$. [CHU 1975], [AVI 1974].

Logo

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi(k-l)}{N}}\right]^n=\begin{cases}N & \text{se } k=l\\ \dfrac{1-e^{2\pi(k-l)}}{1-e^{j2\pi(k-l)/N}}=0 & \text{se } k\neq l\end{cases}.$$

Então $$\sum_{n=0}^{N-1}F(n)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f(l)N\delta_{k,l}=f(k).$$

Propriedades similares àquelas da transformada de Fourier (Seção 1.8) são demonstráveis para a DFT. Em particular:

$$\text{Se } x(kT_s)\leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right) \text{ e } y(kT_s)\leftrightarrow Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

P1 - Linearidade.

$$x(kT_s)+y(kT_s)\leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right)+Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

P2 - Simetria.

$$\frac{1}{N} X\left(kT_s\right) \leftrightarrow x\left(-\frac{n}{NT_s}\right)$$

P3 - Deslocamento no Tempo.

$$x\left(kT_s - lT_s\right) \leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right) e^{j\pi nl/N}$$

P4 - Teorema da Convolução em Freqüência.

$$x(kT_s)y(kT_s) \leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X\left(\frac{i}{NT_s}\right) Y\left(\frac{n-i}{NT_s}\right) := \frac{1}{N} X\left(\frac{n}{NT_s}\right) * Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

P5 - Teorema de Parseval.

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2\left(kT_s\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left| X\left(\frac{n}{NT_s}\right)\right|^2$$

As amostras da DFT são periódicas, verificando as relações:

$F(n+mN) = F(n)$ e $f(k+mN) = f(k)$ $m = 1,2,3,...$

Quando se deseja trabalhar com os valores de freqüência e tempo, usa-se:

$$f\left(kT_s\right) \leftrightarrow F\left(\frac{n}{NT_s}\right) \text{, onde } F\left(\frac{n}{NT_s}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(kT_s\right) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}},$$

em lugar da notação simplificada $f(k) \leftrightarrow F(n)$.

Um aumento na quantidade N de amostras consideradas (e uma escolha do tempo de amostragem T_s) implica em uma melhor representação do espectro. Aos que desejam fazer uso prático da DFT, aconselha-se consultar as referências indicadas, para assegurar uma correta utilização e interpretação dos resultados. Devido à simetria, somente a parte de DFT corresponde à primeira metade, $0 \le n \le N/2$, deve ser considerada como aproximação para o espectro do sinal amostrado.

Transformadas (Fourier, Gabor, Hilbert, do cosseno, wavelets, etc.) vêm desempenhando um papel extremamente relevante em Engenharia. Um dos exemplos mais conhecidos é a bem conhecida Transformada discreta de Fourier (DFT), que tem encontrado aplicações nas mais diferentes áreas do conhecimento, particularmente em Engenharia Elétrica. Um segundo exemplo interessante é a transformada integral de Hartley [HAR 1942], [BRA 1983].

J.W. Cooley (IBM) em colaboração com **J.W. Tukey** (Bell Labs) conseguiram uma revolução maior no tratamento digital de sinais em 1965, com a publicação da transformada rápida de Fourier, a FFT [CERV 1969], [BRI 1974], [DELL 1994]. Trata-se de um método engenhoso e altamente eficiente de reagrupar os cálculos dos coeficientes de uma DFT. Muitos *softwares* dispõem de rotinas para o cálculo da FFT, e.g., MATHEMATICA™, MATLAB™, MATHCAD™ etc.

Ao invés do cálculo da DFT diretamente pela definição, faz-se uso de um algoritmo conhecido como a FFT (*Transformada Rápida de Fourier*) que permite avaliar a DFT com menor esforço computacional[25]. A FFT não é um tipo diferente de transformada e sim uma técnica que possibilita avaliar DFT de forma mais rápida e econômica. Entre as aplicações da FFT destacam-se: a determinação do espectro, realização de integrais de convolução, simulação de filtros e codificação de voz (Comandos do Matlab [KAM&HEC 1997]: *fft, ifft, Hilbert, fft2*).

A FFT pode ser usada no processamento digital de sinais e tem se mostrado muito atrativa. Como exemplo de aplicação, considere o caso de uma ampliação fotográfica na qual há granulação. Para melhorar a qualidade, é possível sujeitá-la a uma filtragem passa-baixa bidimensional. Inicialmente a foto é digitalizada, sendo então calculada a DFT bidimensional. As altas freqüências são removidas usando a função de transferência de um LPF e a transformada discreta inversa é aplicada para obter a imagem processada. Maiores detalhes são encontrados em referências especializadas [BRIG 1974], [WEA 1989]. Há atualmente um grande número de Transformadas Rápidas [OPPE&SCH 1975], [KOVA&VETT 2001]. Especificamente, a Transformada Aritmética de Fourier, AFT, vem surgindo como um método atrativo na avaliação do espectro [CIN&deO 2004].

[25] O esforço computacional para avaliar a DFT é N^2, enquanto que para o algoritmo FFT é dado por $2N\log_2 N$ (sendo N potência de 2). Para N=1024, compare $N^2 \cong 1.000.000$ e $2N\log_2 N \cong 20.000$ em aplicações em tempo real.

A FT não basta? Por que a DFT?

As potencialidades da análise espectral com base na Transformada de Fourier contínua são bem estabelecidas. Ainda que teoricamente atrativo, o cálculo prático do espectro via transformada clássica (empregando propriedades ou soluções analíticas) não é comum. Vários sinais de interesse (como voz, vídeo etc.) não possuem expressões analíticas para descrevê-los. A maneira usual de lidar com sinais físicos é "calcular" a transformada através de um equipamento (*Hardware*): **O analisador de espectro**. Este instrumento realiza o cálculo da Transformada de Fourier e exibe o resultado em tela [SPEN&WORS 1993]. Esta pode ser a solução mais interessante para avaliar o espectro de sinais. Entretanto, com o desenvolvimento de técnicas de Processamento de Sinais DSP (e Processadores em *chip*), a DFT aparece como uma solução prática cada vez mais atrativa. A redução acentuada no custo dos DSPs e o aumento da capacidade de processamento (e.g. milhões de MIPS-Mega instruções por segundo), em conjunto com o aparecimento de novas técnicas eficientes para a avaliação de transformadas discretas (as ditas Transformadas Rápidas), vêm permitindo "operar" em tempo real com muitos sinais. Assim, as transformadas discretas vêm se firmando como ferramentas "por excelência" na análise espectral.

O tamanho dos analisadores de espectro não pode ser comparado ao tamanho reduzido dos DSPs, que adicionalmente permitem operação em grande velocidade, viabilizando numerosas aplicações.

Muitas placas de aquisição de dados com conversores A/D já incorporam *chip* DSD para o cálculo da FFT, permitindo estudar o sinal adquirido no domínio freqüencial.

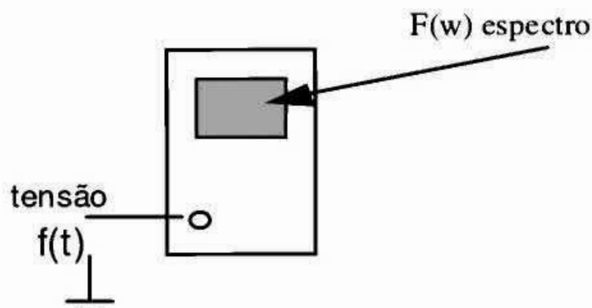


Figura 2.19 O analisador de espectro. Ilustração.

Aplicação do algoritmo FFT é ilustrada estimando-se um espectro de um pulso retangular, amostrado a uma taxa de $T_S^{-1} = 1$ amostra/segundo a partir da origem e empregando N=128 amostras no cálculo da DFT.

Assim, as amostras são dadas por:

$$x(k) = 1 + j0 \quad \text{para } k = 1,2,...,29$$
$$x(k) = 0 + j0 \quad \text{para } k = 31,32,...,127$$
$$x(0) = x(30) = 1/2 + j0.$$

Naturalmente, as amplitudes teóricas do módulo da transformada valem:

$$\left| X(nf_s) \right| = 30 \left| Sa(n\pi 30/128) \right| \;,\; n = 0,1,2, ...,127 .$$

Uma tabela (não incluída) exibe os valores do módulo da transformada, calculados segundo a expressão analítica e pela transformada discreta via FFT. Os resultados são esboçados, a título comparativo.

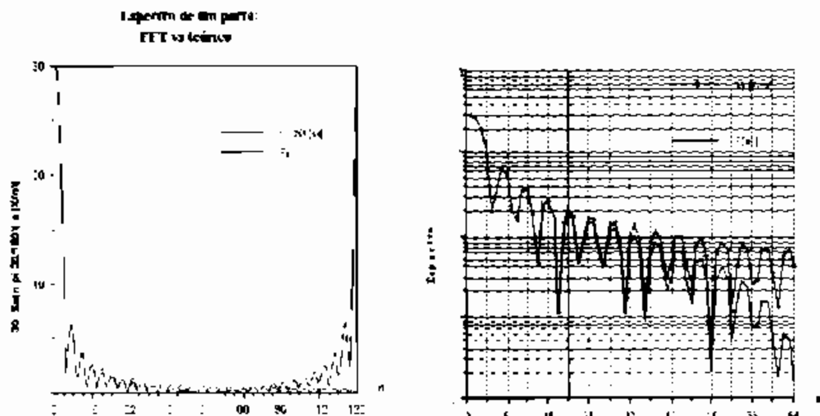


Figura 2.20 Magnitude do espectro discreto da função porta (escala linear e log).

Devido à presença de uma descontinuidade, o valor mostrado no instante t deve ser consistente com $f(t)$=1/2 $[f(t+) + f(t-)]$ de modo que a fórmula de inversão continue válida. No exemplo a seguir, assume-se $h(0)$ = 0,5.

Note-se que a DFT é simétrica em torno do ponto $n=N/2$. Isto se segue do fato que a parte real (resposta imaginária) da transformada de um sinal real é par (respectivamente ímpar). Assim, o resultado obtido para $n>N/2$ corresponde simplesmente às freqüências negativas. Claramente, as aproximações são mais pobres nas altas freqüências.

Exercício 11

Avaliar (programa FFT) a DFT do sinal $h(t):=e^{-t}u(t)$, com auxílio de microcomputador, tomando N=32 amostras e considerando o intervalo entre as amostras T_S = 0,25 segundos (taxa de amostragem).

Solução:

As curvas resultantes (pontos obtidos pela FFT curva teórica) são esboçadas para comparação.

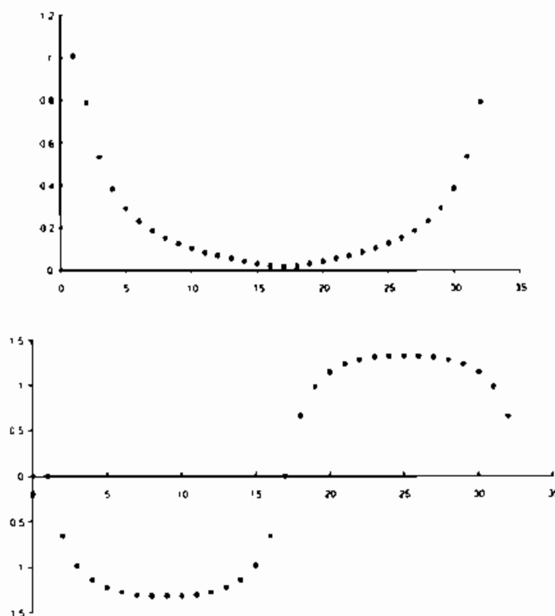


Figura 2.21 DFT parte real e imaginária. Transformada de um pulso exponencial.

A figura anterior mostra as partes, real e imaginária, da transformada do pulso exponencial. É fácil perceber novamente que as aproximações são bastante pobres nas altas freqüências. Para reduzir o erro, torna-se necessário um aumento de N e/ou uma diminuição de T_S. Supondo que a transformada discreta de Fourier é empregada na avaliação do espectro de sinais reais contínuos, são requeridas operações de discretização (amostragem), truncamento e introdução de periodicidade sobre o sinal original.

O desenvolvimento gráfico da DFT é apresentado em exemplo simples no intuito de visualizar os efeitos desta operação no espectro estimado pela DFT.

Uma versão discreta para a Transformada de Hartley, a DHT de comprimento N (denotada $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{V}$) foi proposta em 1983 por **R. Bracewell**, de acordo com [BRA 1983]:

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} v_i cas\left(\frac{2\pi ki}{N}\right), \; k=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Esta transformada é similar a transformada de Fourier, diferenciando-se apenas pela ausência do complexo j no termo cos(wt)+$j$sen(wt). Mostra-se que a transformada inversa de Hartley é dada por:

$$v_i = \sum_{k=0}^{N-1} V_k cas\left(\frac{2\pi ki}{N}\right), \; i=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Deduzem-se facilmente as relações que conectam a transformada de Hartley com a transformada de Fourier:

$$V_k = \Re e(F_k) - \Im m(F_k);$$

$$\Re e(F_k) = \frac{1}{2}(V_{N-k} + V_k) \text{ e } \Im m(F_k) = \frac{1}{2}(V_{N-k} - V_k).$$

Desse modo, o esforço para calcular a Transformada de Hartley é praticamente idêntico àquele para calcular a transformada de Fourier: ambas apresentam a mesma complexidade multiplicativa.

A título de visualizar diretamente as possíveis vantagens decorrentes da simetria da transformada de Hartley (DHT), comparativamente à transformada de Fourier (DFT), mostram-se as matrizes de transformação para comprimento de bloco N=12 (precisão inferior a três casas decimais, a fim de adequar a formatação).

0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083
0.083	0.072 +0.042i	0.042 +0.072i	0.083i	0.042+ 0.072i	-0.072 +0.042i	-0.083	-0.072 -0.042i	-0.042 -0.072i	0.083i	0.042 -0.072i	0.072 -0.042i
0.083	0.042 +0.072i	-0.042 +0.072i	-0.083	-0.042 -0.072i	0.042 -0.072i	0.083	0.042 +0.072i	-0.042 +0.072i	-0.083	-0.042 -0.072i	0.042 -0.072i
0.083	0.083i	-0.083	-0.083i	0.083	0.083i	-0.083	-0.083i	0.083	0.083i	-0.083	-0.083i
0.083	0.083i	-0.083	-0.083i	0.083	0.083i	-0.083	-0.083i	0.083	0.083i	-0.083	-0.083i
0.083	-0.072 +0.042i	0.042 -0.072i	0.083i	-0.042 -0.072i	0.072 +0.042i	-0.083	0.072 -0.042i	-0.042 +0.072i	-0.083i	0.042 +0.072i	-0.072 -0.042i
0.083	-0.083	0.083	-0.083	0.083	-0.083	0.083	-0.083	0.083	-0.083	0.083	-0.083
0.083	-0.072 -0.042i	0.042 +0.072i	-0.083i	-0.042 +0.072i	0.072 -0.042i	-0.083	0.072 +0.042i	-0.042 -0.072i	0.083i	0.042 -0.072i	-0.072 +0.042i
0.083	-0.042 -0.072i	-0.042 +0.072i	0.083	-0.042 -0.072i	-0.042 +0.072i	0.083	-0.042 -0.072i	-0.042 +0.072i	0.083	-0.042 -0.072i	-0.042 +0.072i
0.083	-0.083i	-0.083	0.083i	0.083	-0.083i	-0.083	0.083i	0.083	-0.083i	-0.083	0.083i
0.083	0.042 -0.072i	-0.042 -0.072i	-0.083	-0.042 +0.072i	0.042 +0.072i	0.083	0.042 -0.072i	-0.042 -0.072i	-0.083	-0.042 +0.072i	0.042+ 0.072i
0.083	0.072 -0.042i	0.042 -0.072i	-0.083i	-0.042 -0.072i	-0.072 -0.042i	-0.083	-0.072 +0.042i	-0.042 +0.072i	0.083i	0.042 +0.072i	0.072+ 0.042i

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1.366	1.366	1	0.366	-0.366	-1	-1.366	-1.366	-1	-0.366	0.366
1	1.366	0.366	-1	-1.366	-0.366	1	1.366	0.366	-1	-1.366	-0.366
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	0.366	-1.366	1	0.366	-1.366	1	0.366	-1.366	1	0.366	-1.366
1	-0.366	-0.366	1	-1.366	1.366	-1	0.366	0.366	-1	1.366	-1.366
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1.366	1.366	-1	0.366	0.366	-1	1.366	-1.366	1	-0.366	-0.366
1	-1.366	0.366	1	-1.366	0.366	1	-1.366	0.366	1	-1.366	0.366
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-0.366	-1.366	-1	0.366	1.366	1	-0.366	-1.366	-1	0.366	1.366
1	0.366	-0.366	-1	-1.366	-1.366	-1	-0.366	0.366	1	1.366	1.366

Assim, a concepção de algoritmos eficientes (rápidos) para a DFT via a DHT pode ser mais atrativa e as implementações em *hardware* deles decorrentes, mais simplificadas.

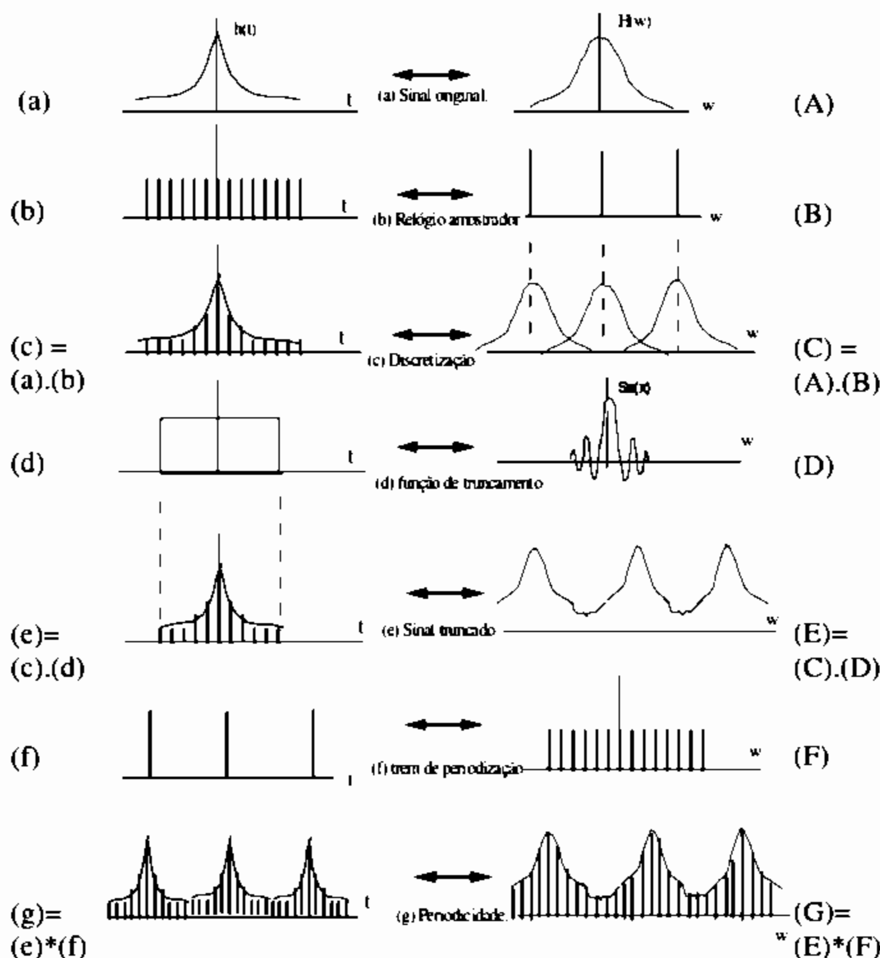


Figura 2.22 Desenvolvimento da DFT:
Discretização, truncamento e periodização.

O efeito do truncamento desaparece quando $N \to +\infty$ (janela infinita). As *funções amostrais* (no domínio *f*) tendem a um impulso e a convolução dos espectros (c) e (d) = (e) reproduz exatamente (c) !

Exercício 12.
Calcular explicitamente a DFT do sinal em rampa $f(k)=k$, $k=0,1,2,\ldots,N-1$.

Solução. Por definição, $F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}k.e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$ para n=0,1,2,...,N-1. Mas $\sum_{k=0}^{N-1}e^{jkt}=\frac{1-e^{jNt}}{1-e^{jt}}$ para $t\neq 2\pi n$. Derivando-se a expressão, obtém-se $\sum_{k=0}^{N-1}k.e^{jkt}=\frac{-Ne^{jNt}\left(1-e^{jt}\right)+\left(1-e^{jNt}\right)e^{jt}}{(1-e^{jt})^2}$, também válida para $t\neq 2\pi n$.

Separam-se os caso n=0 e n=1,2,...,N-1 ($\Rightarrow t\neq 2\pi n$). Nos casos particulares em que $t=-\frac{2\pi n}{N}$, deriva-se facilmente que

$$\sum_{k=0}^{N-1}k.e^{jkt}=\begin{cases}\frac{N(N-1)}{2} & \text{se } n=0\\ \frac{jN.e^{j\frac{n\pi}{N}}}{2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{N}\right)} & \text{para } n=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$$

$$F(n)=\begin{cases}\frac{(N-1)}{2} & \text{se } n=0\\ \frac{1}{2}\left(-1+j\cot g\,\frac{n\pi}{N}\right) & \text{para } n=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$$

Em resumo, vale sintetizar as possíveis abordagens usando várias formas da decomposição de Fourier.

Tabela III.2. Representações de Fourier para sinais.

Tempo *Freqüência*	Contínuo	Discreto
Contínua	$F(w):=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-jwt}dt$ $-\infty<w<+\infty$ **transformada de Fourier**	$F(e^{j\omega}):=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]e^{-j\omega k}$ $0\leq\omega<2\pi$ **Fourier de tempo discreto**
Discreta	$F_n:=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jnw_0t}dt$ $nw_0,\ n\in\mathbb{Z}$ **série de Fourier**	$F[n]:=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n}$ $n=0,1,\ldots,N-1$ (DFT)

2.9 FFT- TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Formalmente, supõe-se que um algoritmo (noção introduzida por **Abu Al-Khwarizmi**) é implementado por intermédio de L máquinas seqüenciais interconectadas: $\underline{S}=(S_1,S_2,...,S_L)$.

Cada uma possui uma *complexidade espacial* $\underline{X}=(X_1,X_2,...,X_L)$ e uma *complexidade temporal* $\underline{T}=(T_1,T_2,...,T_L)$. O *trabalho de cálculo* $\mathbf{W}$ é definido pelo produto escalar destes vetores, $W=\underline{X}\bullet\underline{T}=\sum_{i=1}^{L}X_iT_i$.

Globalmente, a complexidade no espaço é $X=\sum_{i=1}^{L}X_i$ e a complexidade no tempo é T:=MAX (T_i).

Pode haver um compromisso entre complexidade temporal e espacial, nos algoritmos de *implementação paralela*. Por exemplo, é possível aumentar a complexidade espacial (introduzindo mais máquinas) a fim de reduzir a complexidade temporal. Alternativamente, é possível diminuir a complexidade espacial através da realização seqüencial de tarefas, aumentando, entretanto a complexidade temporal.

O esforço computacional pode ser definido como o número máximo de operações elementares necessárias para resolver o problema. No caso da DFT, pode-se tratar da complexidade multiplicativa e complexidade aditiva i.e., número de multiplicações ponto flutuante (respectivamente adições) necessárias para calculá-la. *Tradicionalmente*, tem-se usado apenas a **complexidade multiplicativa** como o parâmetro mais importante.

FFT- Transformada Rápida de Fourier: (Cooley-Tukey base 2):


J.W. Cooley (1926-)


J.W. Tukey (1915-2000).

A FFT foi implementada com o objetivo de diminuir complexidade (temporal) necessária para calcular uma DFT (*Transformada Discreta de Fourier*), visando aplicações em tempo real. O número de operações realizadas no cálculo da DFT através da definição é proporcional à N^2, i.e., para cada dos N valores de n, a expansão de $F(n)$ requer N multiplicações complexas de $f(k)$ por W^{kn} além de (N-1) adições dos resultados.

Entretanto, alguns dos termos podem ser computados apenas uma vez e armazenados em uma tabela para uso em operações futuras. Logo, tais multiplicações de $f(k)$ não são consideradas na implementação.

$$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\cdot W_N^{kn}.$$

Algumas decomposições apropriadas na equação anterior podem tornar o número de multiplicações e adições proporcionais a $N.\log_2 N$.

Este procedimento é denominado de Transformada Rápida de Fourier ou FFT (*Fast Fourier Transform*) [COOL 1987], [DELL 1994]. Esta redução do número de operações representa uma economia significante no esforço computacional, como mostra a tabela a seguir.

Tabela IV.2 Complexidades na avaliação da DFT de comprimento *N*.

N	N^2 (DFT)	$N*\text{Log}_2 N$ (FFT)	Vantagem
2	4	2	2
4	16	8	2
8	64	24	2,67
16	256	64	4
32	1024	160	6,40
64	4096	384	10,67
128	16384	896	18,29
256	65536	2048	32
512	262144	4068	56,89
1024	1048576	10240	102,40
2048	4194304	22528	186,18
4096	16777216	49512	341,33
8192	671088964	106496	630,15

http://www.dartmouth.edu/~chemlab/info/resources/spectrum/spectrum.html
http://www.dsptutor.freeuk.com/analyser/SpectrumAnalyser.html
http://www.cs.rit.edu/~ncs/color/a_spectr.html

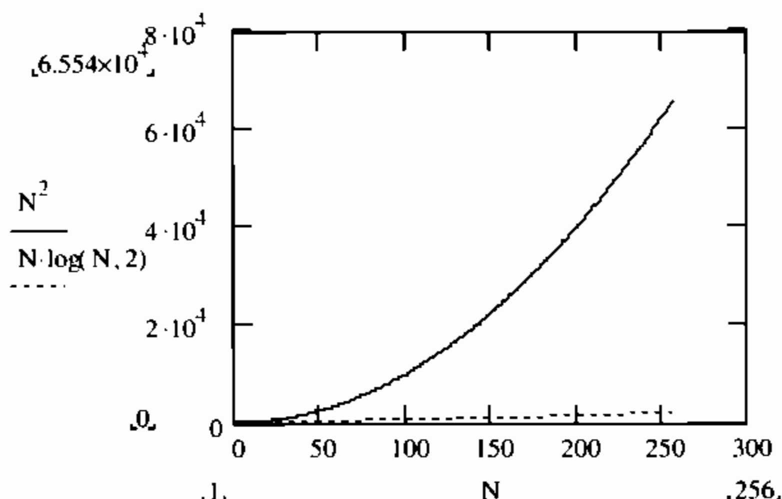


Figura 2.23. Complexidade Aritmética do cálculo da DFT expressa em número de multiplicações requeridas: Usando a definição (linha cheia) e com o fulgurante algoritmo FFT base 2 (linha pontilhada).

O Algoritmo FFT

Por conveniência, a equação da DFT pode ser reescrita sob a seguinte forma:

$$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\cdot W_N^{kn}\text{, em que } W_N=\exp[-j\cdot 2\cdot\frac{\pi}{N}]\cdot$$

Assuma que N é da forma: $N=2^L$; em que L é inteiro positivo. N pode ser expresso como: $N=2*M$; em que M é um inteiro positivo.

Substituindo esta relação, chega-se a:

$$F(n)=\frac{1}{2\cdot M}\sum_{k=0}^{2M-1} f(k)W_{2M}^{kn}\cdot$$

Dividindo-se o somatório em duas partes, relativas aos índices pares e ímpares, deduz-se:

$$F(n)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k)W_{2M}^{n(2k)}+\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k+1)W_{2M}^{n(2k+1)}\right]\ .$$

Como $W_{2M}^{2nk} = W_M^{nk}$, é possível reescrever a equação anterior sob a forma:

$$F(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k) W_M^{nk} + \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k+1) W_{2M}^{n(2k)} W_{2m}^{n}\right].$$

Agora considerando as seguintes DFTs:

$$F_{even}(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k) W_M^{nk} \text{ e } F_{odd}(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(2k+1) W_M^{nk} \text{ ; } n=0,1,\ldots,M-1,$$

chega-se a uma relação que decompõe uma DFT F(n) de comprimento $2M$ em duas DFTs, $F_{even}(n)$ e $F_{odd}(n)$, ambas de comprimento M:

$$F(n) = \frac{1}{2}\left[F_{even}(n) + F_{odd}(n) W_{2M}^{n}\right].$$

Observa-se também que: $W_M^{n+M} = W_M^n$ e $W_{2M}^{n+M} = -W_{2M}^n$, de modo que

$$F(n+M) = \frac{1}{2}\left[F_{even}(n) - F_{odd}(n) W_{2M}^{n}\right].$$

Uma análise cuidadosa das equações revela algumas propriedades interessantes destas expressões.

Uma transformada de comprimento N pode ser computada dividindo a expressão original em duas partes, como indicado anteriormente.

O cálculo da primeira metade de $F(n)$ requer a avaliação de duas transformadas de $(N/2)$-pontos dadas pelas equações $\boldsymbol{F}_{even}(n)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(n)$. Os resultados de $\boldsymbol{F}_{even}(n)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(n)$ são substituídos para obter $F(n)$ para $n=0,1,2,\ldots, (N/2-1)$. Os outros valores seguem diretamente, sem avaliações de transformações adicionais.

Para examinar as implicações computacionais deste procedimento, considere $m(.)$ e $a(.)$ como o número de multiplicações complexas e adições, respectivamente, exigidas para implementação. Suponha que o número de amostras é igual a 2^L, em que L é um inteiro positivo. Supondo $L=1$. A transformada de dois pontos requer a avaliação de $F(0)$, pois $F(1)$ segue de imediato. Para obter $F(0)$, precisa-se do cálculo de $\boldsymbol{F}_{even}(0)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(0)$.

Neste caso, $M=1$ e $\boldsymbol{F}_{even}(n)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(n)$ são transformada de apenas um ponto, porque a transformada de Fourier de um único ponto é o próprio ponto, por isso nenhuma multiplicação ou adição são efetuadas

para obtenção de $\boldsymbol{F}_{even}(0)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(0)$. Apenas uma multiplicação de $\boldsymbol{F}_{odd}(0)$ por W_2 e uma adição são requeridas para a obtenção de $F(0)$. Então $F(1)$ calcula-se com uma adição a mais (considera-se, em termos de complexidade, que subtração e adição são idênticas). Como o produto $\boldsymbol{F}_{odd}(0).W_2$ já foi previamente computado, o número total de operações requeridas para uma transformada de comprimento dois consiste em $m(1)=1$ multiplicação e $a(1)=2$ adições.

O próximo valor permitido para L é 2. De acordo com o desenvolvimento mencionado, a transformada de quatro pontos pode ser dividida em duas partes. A primeira metade de $F(n)$ requer avaliação da transformada de dois pontos, como nas equações de $\boldsymbol{F}_{even}(n)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(n)$. Para M=2. A transformada de dois pontos requer $m(1)$ multiplicações e $a(1)$ adições, logo a avaliação destas duas equações requer um total de $2m(1)$ multiplicações e $2a(1)$ adições. Duas multiplicações adições adicionais são necessárias para obter $F(0)$ e $F(1)$. Isto porque já tinham sido computados $\boldsymbol{F}_{odd}(u).W_{2M}$ para $L=\{0,1\}$. Mais duas adições fornecem $F(2)$ e $F(3)$. A complexidade total é então $m(2)=2m(1)+2$ e $a(2)=2a(1)+4$.

Quando L é igual a 3, a transformada de quatro pontos é considerada na avaliação de $\boldsymbol{F}_{even}(n)$ e $\boldsymbol{F}_{odd}(n)$. Estas requerem $2m(2)$ multiplicações e $2a(2)$ adições. Mais quatro multiplicações e mais oito adições levam à transformada completa. O total é então $m(3)=2m(2)+4$ e $a(3)=2a(2)+8$.

Continuando com este argumento para qualquer valor de inteiro positivo de L, encontram-se expressões de recursividade para o número de multiplicações e adições exigidas para a implementação de FFT:

$m(L) = 2m(L-1) + 2^{L-1}$ e $a(L) = 2a(L-1) + 2^{L}$, em que $m(0)=0$ e $a(0)=0$, visto que a transformada de um único ponto não requer qualquer adição ou multiplicação.

Número de Operações

Por indução, o número de multiplicações complexas e número de adições requeridas na implementação do algoritmo FFT são, respectivamente:

$$m(L+1) = \frac{1}{2}2^{L+1}\log_2 2^{L+1}, \text{ ou seja, } m_{total} = \frac{1}{2}N\log_2 N \text{ e :}$$

$$a(L+1) = 2^{L+1}\log_2 2^{L+1}, \quad \text{ou seja, } a_{total} = N\log_2 N \,.$$

A FFT inversa

Para calcular uma "FFT inversa" usa-se praticamente o mesmo algoritmo "FFT direta", com algumas modificações. As relações envolvendo a DFT e a DFT inversa:

$$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(k)\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{N}\right] \text{ e } f(k)=\sum_{n=0}^{N-1}F(n)\exp\left[\frac{j2\pi nk}{N}\right].$$

Tomando o complexo conjugado dos dois lados e dividindo ambos os membros por N, obtém-se:

$$\frac{1}{N}f^*(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F^*(n)\exp\left[\frac{-j2\pi nk}{N}\right].$$

Investigando este resultado, observa-se que o lado direito da equação está na forma da transformada de Fourier.

Se na entrada de um algoritmo projetado para computar a transformada FFT aplica-se $F^*(n)$, a saída será $f^*(k)/N$. Tomando o complexo conjugado e multiplicando por N, tem-se o sinal $f(k)$ inverso desejado.

Implementação da FFT

O principal ponto das implementações diz respeito ao arranjo dos dados de entrada visando à aplicação da divisão de uma transformada em termos de outras com menor comprimento.

O procedimento de reordenação pode ser ilustrado através de um exemplo simples (N=8).

Entrada $\{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\}$.

Separando as amostras de argumentos pares e ímpares:

Pares $\{f(0), f(2), f(4), f(6)\}$.
Ímpares $\{f(1), f(3), f(5), f(7)\}$.

Contudo, para reaplicar o procedimento, as componentes pares e ímpares devem ser novamente separadas:

Pares	$\{f(0), f(4)\}$.	$\{f(1), f(5)\}$.
Ímpares	$\{f(2), f(6)\}$.	$\{f(3), f(7)\}$.

REARRANJO:

Entrada {f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)}.
{f(0), f(4), f(2), f(6), f(1), f(5), f(3), f(7)}.

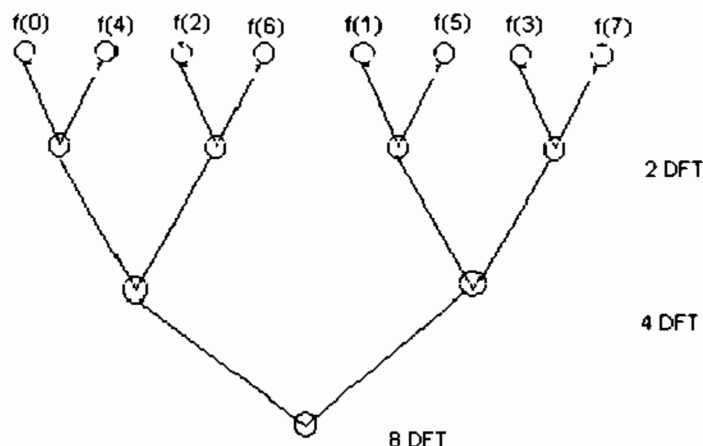


Figura 2.24 Arranjo para o algoritmo Cooley-Tukey base 2 com comprimento N=8.

A existência de algoritmos rápidos é um fator decisivo nas inúmeras aplicações em tempo real da DFT. Devido ao algoritmo **Cooley-Tukey** base 2, freqüentemente usam-se comprimentos que são potência de 2 (*radix*-2).

Tabela V.2 Reordenação do arranjo e leitura inversa de bits: A permutação espelho.

Numeração original			Arranjo original	Numeração bits invertidos			Arranjo reordenado
0	0	0	**f(0)**	0	0	0	**f(0)**
0	0	1	**f(1)**	1	0	0	**f(4)**
0	1	0	**f(2)**	0	1	0	**f(2)**
0	1	1	**f(3)**	1	1	0	**f(6)**
1	0	0	**f(4)**	0	0	1	**f(1)**
1	0	1	**f(5)**	1	0	1	**f(5)**
1	1	0	**f(6)**	0	1	1	**f(3)**
1	1	1	**f(7)**	1	1	1	**f(7)**

APPLETS SOBRE ANALISADOR E FFT

- http://pirate.shu.edu/~wachsmut/Java/FFT/
- http://www.dsptutor.freeuk.com/analyser/SpectrumAnalyser.html
- http://www.umoncton.ca/genie/electrique/Cours/Hamam/SignalProc/Analyser/SignalAnalyser.htm

Em sua tese de doutorado em 1987, **Heidman** enfoca a teoria da complexidade aritmética da DFT e chega a resultados notáveis. Entre eles, uma cota inferior para a complexidade multiplicativa no cálculo de transformadas discretas de Fourier, a qual é enunciada a seguir. Denota-se $\mu_{DFT}(N)$ a complexidade multiplicativa mínima para o cálculo exato de uma DFT de comprimento N.

Teorema (Heidman). Para $N = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ em que p_i, i=1,...,m são primos distintos e e_i, i=1,...,m são inteiros positivos, tem-se que

$$\mu_{DFT}(N) = 2N - \sum_{i_1=0}^{e_1}\sum_{i_2=0}^{e_2}\cdots\sum_{i_3=0}^{e_m}\phi\left(mdc\left(\prod_{j=1}^{m} p_j^{i_j}, 4\right)\right).$$

$$\left(1+\sum_{d_1 \mid \frac{\phi(p_1^{i_1})}{\phi(mdc(p_1^{i_1},4))}}\ \sum_{d_2 \mid \frac{\phi(p_2^{i_2})}{\phi(mdc(p_2^{i_2},4))}}\ \sum_{d_m \mid \frac{\phi(p_m^{i_m})}{\phi(mdc(p_m^{i_m},4))}} \frac{\prod_{k=1}^{m}\phi(d_k)}{\phi(mmc(d_1, d_2, \ldots, d_m))}\right)$$

em que $\phi(.)$ é a função Totient de Euler, *mdc*(.,.) denota o máximo divisor comum e *mmc*(.,.) o mínimo múltiplo comum.

Prova. Vide [M.T. Heidman, 1988, pág.98]. ■

O uso deste teorema para diversos valores de N resulta na tabela de complexidades mostrada a seguir. A diferença de complexidade é aparente. Outro ponto a destacar é o fato que alguns usuários acreditam a FFT (Cooley-Tukey) é o melhor algoritmo para o cálculo da DFT. Adiciona-se uma curta tabela com uma cota inferior na complexidade para determinar uma DFT de comprimento N, denotada $\mu_{DFT}(N)$, para outros comprimentos (vide M.T. Heidman, *Multiplicative complexity, Convolution, and the DFT*, Springer Verlag, 1988). Este é um dos trabalhos mais provocantes do final do século XX, no tema. http://en.wikipedia.org/wiki/FFT_complexity.

Tabela VI.2 (a) Complexidade multiplicativa mínima (número de multiplicações ponto flutuante) para cálculo de uma DFT para alguns comprimentos de bloco selecionados.

N	2	3	4	5	6	8	12	16	24	32	48	64	128	256
definição	4	9	16	25	36	64	144	256	576	1024	2 304	4.096	16 384	65 536
FFT	2		8		–	24		64	–	160		384	896	2 048
$\mu_{DFT}(N)$	0	1	0	4	2	2	4	10	12	32	38	84	198	438

Tabela VI.2 (b) Cota inferior na complexidade para determinar uma DFT ou DHT de comprimento *N*.

N	$\mu_{DFT}(N)$		N	$\mu(DFT(N))$
4	0		120	120
8	2		240	274
12	4		720	986
24	12		...	...
48	38		65520	108594
60	56		...	...

Existe um grande número de diferentes algoritmos rápidos propostos na literatura, incluindo Cooley-Tukey, Good-Thomas, PFA (Algoritmo de fatores primos) e Algoritmo de Winograd-Fourier (WFTA) [WIN 1978]. Recentemente, **de Oliveira, Cintra, Campello de Souza** ([deO *et al.*, 2000], [deO&SOU, 2001], [deO *et al.* 2001]) propuseram um algoritmo baseado na decomposição multicamada de Hadamard para avaliar a DFT via Transformada Discreta de Hartley (DHT) que atinge complexidade mínima para comprimentos de bloco até N=24.

Decomposição em multicamadas de Hadamard para a Transformada Discreta de Hartley[26]

As FFT mostradas atingem a cota inferior para a complexidade multiplicativa para a DFT/DHT. Estes novos esquemas são baseados em decomposição em multicamadas da DHT usando matrizes de Hadamard-

[26] Multilayer Hadamard Decomposition of Discrete Hartley Transforms, **H.M. de Oliveira, R.J. de Sobral Cintra** and **R.M. Campello de Souza**

Walsh (HWT). Cada HWT implementa pré-adições e estes esquemas são particularmente atrativos para implementação em *Digital Signal Processor* (DSP), ou circuitos integrados dedicados de alta velocidade. Em particular, esquemas para comprimentos de bloco N=4, 8, 12 e 24 são mostrados.

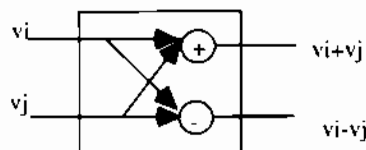


Figura 2.25 Diagrama de uma FFT sem multiplicações para a transformada de Hadamard.

CALCULANDO UMA DHT DE COMPRIMENTO DE BLOCO 4

Esta DHT é equivalente a uma transformada de Hadamard de 4-pontos, tendo, portanto, uma complexidade multiplicativa zero. (4-DHT: A=4 adições e M=0 multiplicações).

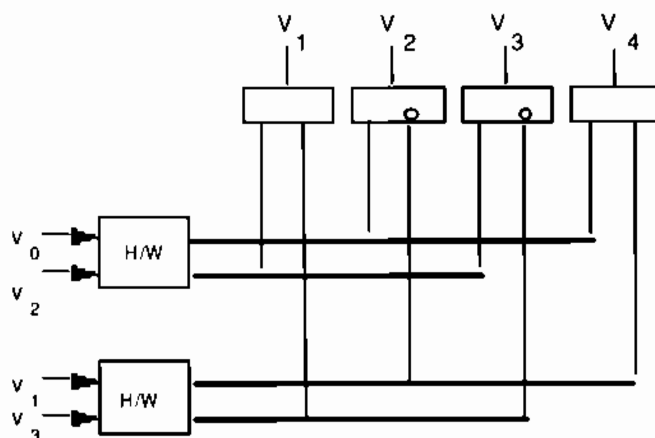


Figura 2.26 Diagrama FFT sem multiplicações para a transformada 4-DHT/DFT: DHT com base em transformadas de Hadamard-Walsh. Os pequenos círculos nas caixas indicam que uma subtração é usada em vez de adição. Os blocos H/W denotam uma transformada de Hadamard.

CALCULANDO UMA DHT DE COMPRIMENTO DE BLOCO 8.

Um esquema de implementação para a 8-DHT é mostrado a seguir. Somente duas multiplicações por 0,708... são requeridas. A complexidade para a 8-DHT é: A=40 adições e M=2 multiplicações.

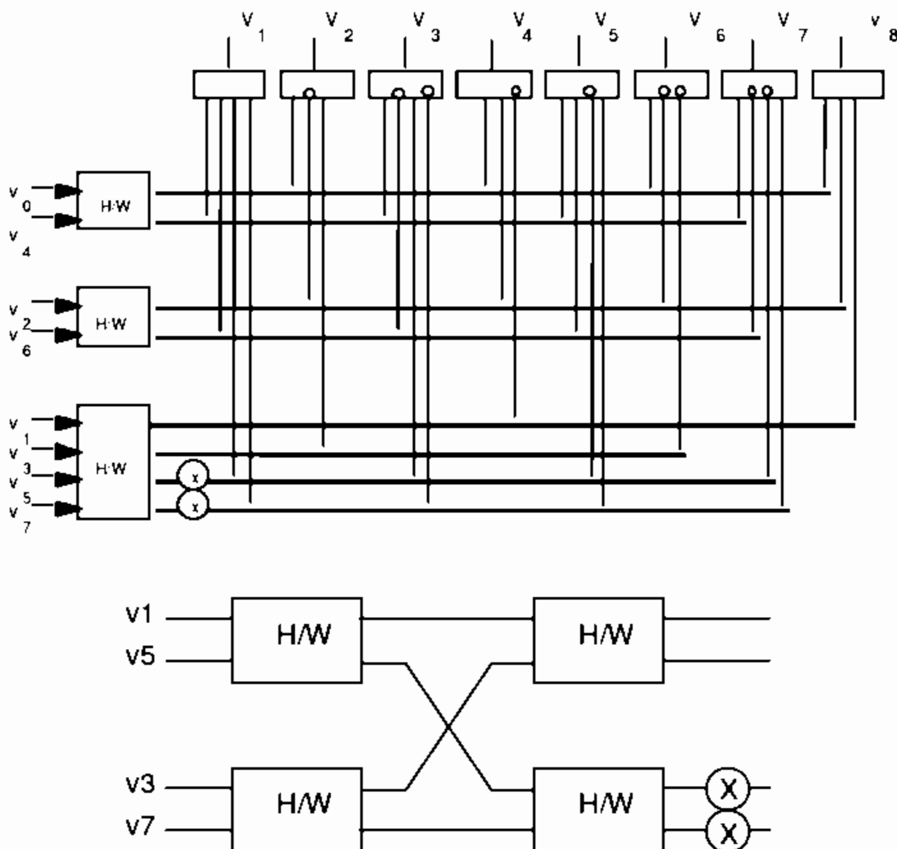


Figura 2.27 FFT para a 8-DHT/DFT. (a) Uma FFT com apenas duas multiplicações; (b) Detalhes do bloco da transformada 4-H/W. Os pequenos círculos nas caixas indicam que uma subtração é usada em vez de adição. Os blocos H/W denotam uma transformada de Hadamard.

CALCULANDO UMA DHT DE COMPRIMENTO DE BLOCO 12

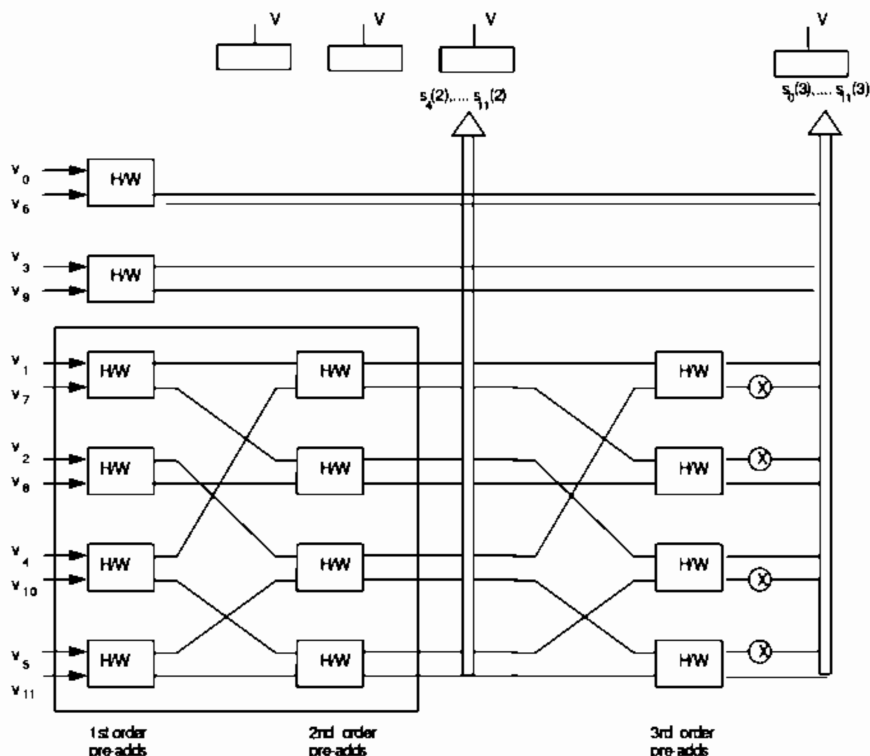


Figura 2.28 FFT para uma 12-DHT/DFT com apenas 4 multiplicações para implementação em circuitos. Os blocos H/W denotam uma transformada de Hadamard.

CALCULANDO UMA DHT DE COMPRIMENTO DE BLOCO 24

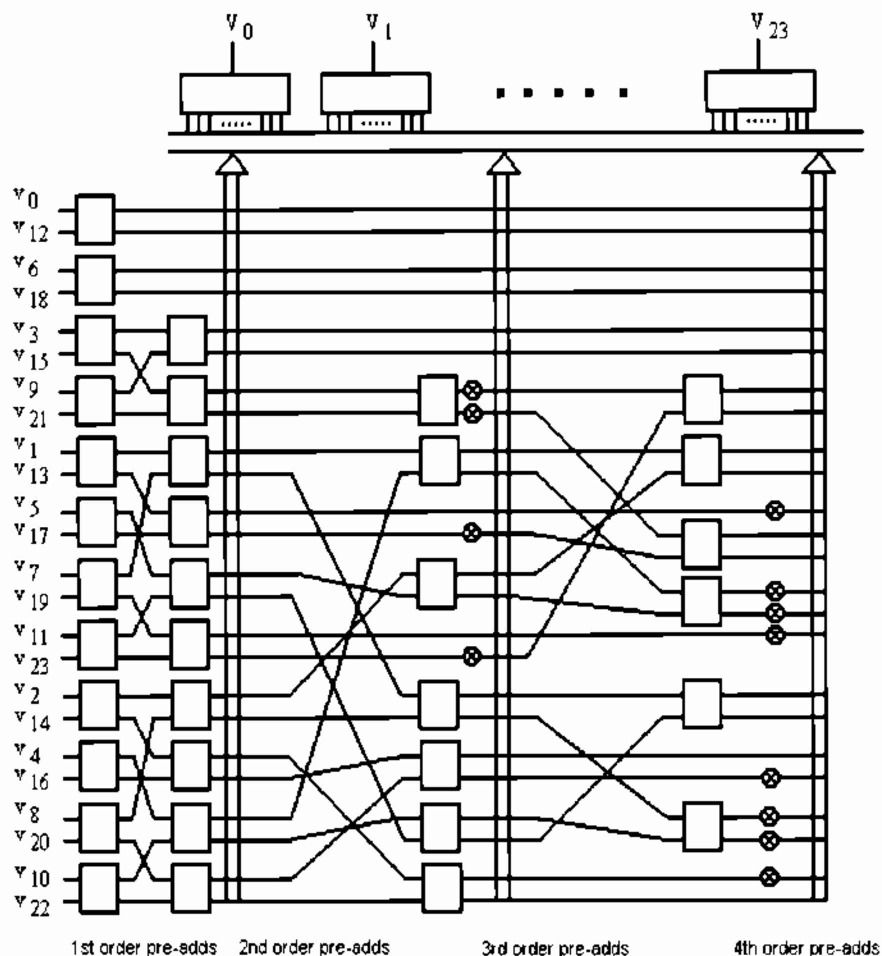


Figura 2.29 FFT para uma 24-DHT/DFT com apenas 12 multiplicações ponto flutuante para implementação em CI. Observe que as multiplicações são realizadas em diferentes camadas (4 multiplicações e 8 multiplicações).

2.10 TRANSFORMADAS BASEADAS EM SINAIS CONSTANTES POR PARTES

A transformada de Fourier padrão é especialmente atrativa para **sinais estacionários**, i.e., para sinais cujas propriedades não variam substancialmente no tempo (ou no espaço, no caso de imagens).

A estacionaridade pode ser definida de um modo mais preciso no caso de sinais estocásticos, contudo um conceito vago é suficiente para os propósitos da presente análise.

No caso de alguns sinais com imagens contendo fronteiras pronunciadas (mudanças abruptas de contraste) ou outras descontinuidades, a análise e síntese de Fourier não são muito apropriadas para acomodar os termos de altas freqüências, os quais não tem efeitos localizados *nesta análise*.

Por simplicidade, considera-se um sinal constante por partes. Nestes casos, bases de sinais constantes por partes (Walsh, Haar, etc.) podem ser mais adequadas, conduzindo a outras transformadas.

Um sinal de teste (constante por partes) é mostrado na figura que segue.



Figura 2.30 Um sinal 1-D de teste, constante por partes.

Um outro possível sinal de teste (contínuo) é mostrado a seguir.

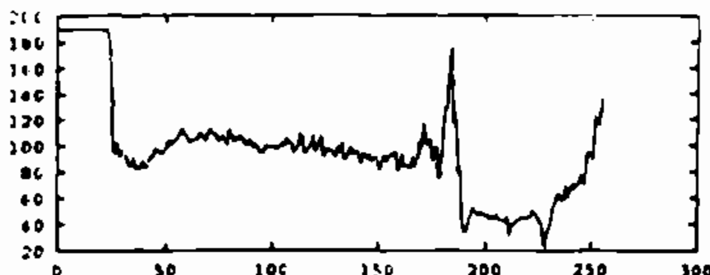


Figura 2.31 Trecho de sinal de teste do tipo vídeo (sinal de uma linha horizontal).

A Transformada de Walsh.

Uma transformada com propriedades similares a transformada de Fourier, mas um pouco mais simples de implementar por considerar bases de "*sinais constantes por partes*", é a *Transformada de Walsh* [FOU 1995], [MOR 1997].

Um conjunto de funções digitais ortogonais (as funções de Walsh) pode ser gerado com o auxílio das matrizes (ortogonais) de Hadamard (construídas por **Jacques Hadamard**), resultando em expansões em Série de Walsh-Hadamard.

Seja Δ a matriz de Hadamard de ordem 2, $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e considere a matriz de ordem 4 gerada por um produto de Kronecker, i.e., $\begin{bmatrix} \Delta & \Delta \\ \Delta & -\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Os sinais usados numa Transformada de Walsh de comprimento 4 são mostrados em seguida.

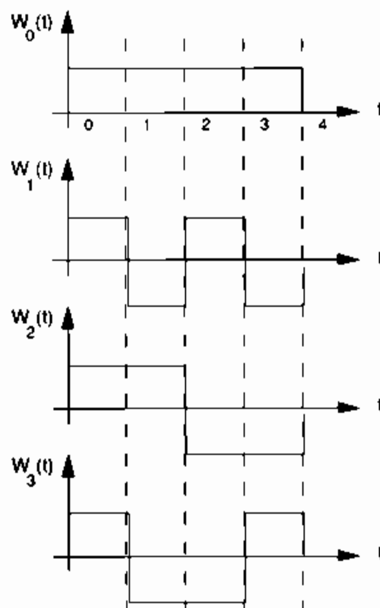


Figura 2.32 Portadoras de Walsh de comprimento 4.

Verifica-se que os sinais $W_i(t)$ (portadoras de Walsh) são ortogonais no intervalo de definição. A função pode ser reconstruída via

$$f(t) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i W_i(t) \cdot$$

Considerando o exemplo do sinal de teste (1), o espectro de Walsh correspondente é mostrado:

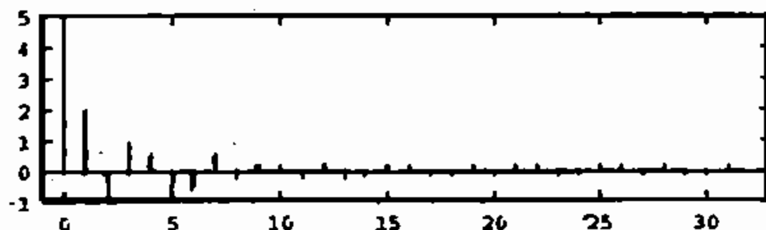


Figura 2.33 Espectro de Walsh do sinal de teste 1.

A transformada também pode ser usada para analisar (decompor) o sinal de teste (2), resultando em um erro na aproximação. A análise via decomposição de Walsh resulta no espectro de Walsh mostrado a seguir.

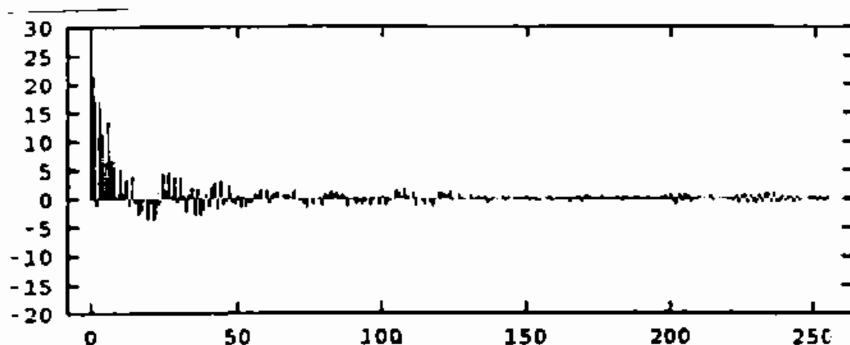


Figura 2.34 Espectro de Walsh do sinal de teste 2.

A síntese baseada na decomposição de Walsh resulta numa boa aproximação, dependendo do número de funções usadas na "base" (i.e., o comprimento da transformada).

A transformada de Haar.

Os primeiros oito sinais uma decomposição de Haar são esboçados a seguir. Estes sinais constituem um sistema wavelet (capítulo 3).


Alfred Haar (1885-1933).

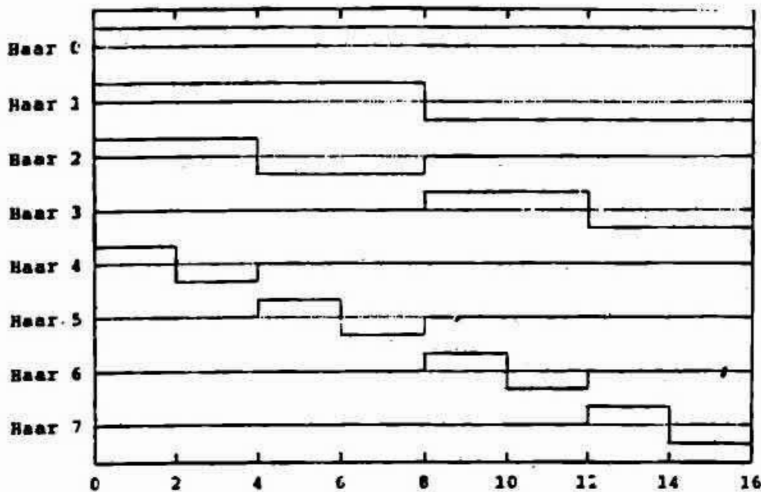


Figura 2.35 As bases de Haar.

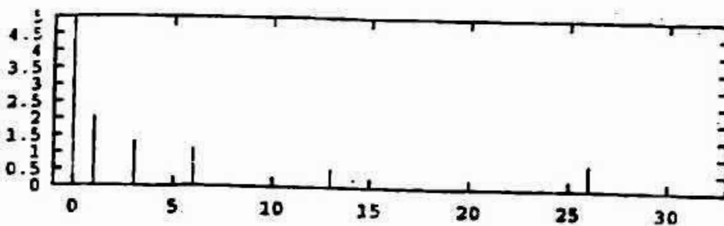


Figura 2.36 O espectro de Haar corresponde ao sinal de teste 1.

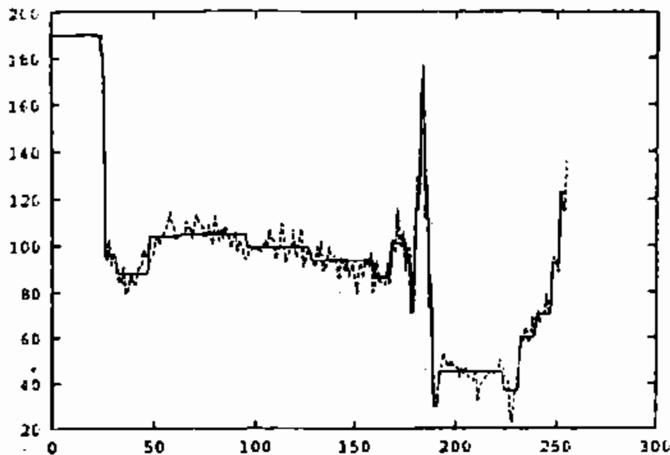


Figura 2.37 Sinal de teste 2 aproximado usando a Transformada de Haar.

2.11 TRANSFORMADAS BIDIMENSIONAIS

A análise espectral envolvendo imagens lida freqüentemente com transformadas de Fourier bidimensionais.

Para sinais $f(x,y)$, define-se

$$F(w_x, w_y) := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left(-jw_x x - jw_y y\right)dxdy$$

e denota-se o par-transformada por:

$$f(x,y) \leftrightarrow F(w_x, w_y). \blacksquare$$

A análise de alguns sistemas bidimensionais com simetria circular (e.g. muitos sistemas ópticos) pode ser simplificada através de uma única variável radial, ao invés de duas variáveis x e y independentes.

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy.$$

A transformada unidimensional com um núcleo de Bessel é encontrada através das seguintes relações:

$f(x,y)=\mathbf{f}(r)$ em que $r^2=x^2+y^2$,
$F(u,v)=\mathbf{F}(q)$ em que $q^2=u^2+v^2$.

As transformações de coordenadas correspondem a:

$$x+jy = r.e^{j\theta}$$

$$u+jv = q.e^{j\varphi}.$$

em que: $x=r.cos\theta$ $y=r.sen\theta$ $u=q.cos\phi$ $v=q.sen\phi$.

O Jacobiano da transformação (x,y) em (r,θ) é $r.dr.d\theta$. Note que $x.u+y.v = r.cos\theta.q.cos\phi + r.sen\theta.q.sen\phi = rq.(cos\theta.cos\phi+sen\theta.sen\phi)=rq.cos(\theta-\phi)$.

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp(-j2\pi(ux+vy))dxdy =$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(r)\exp(-j2\pi qr\cos(\theta-\phi))rdrd\theta$$

Assim, $F(u,v) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}(r)\left[\int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi qr\cos\theta d\theta)\right]rdr$.

Mas $J_0(\beta) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-j\beta\cos\zeta}d\zeta$ de modo que

$$F(u,v) = 2\pi\int_0^{\infty}\mathbf{f}(r)rJ_0(2\pi qr)dr := \mathbf{F}(q).$$

A Transformada de Hankel-Bessel (ordem zero): $\mathbf{f}(r) \leftrightarrow \mathbf{F}(q)$.

$$\mathbf{F}(q) := 2\pi\int_0^{\infty}\mathbf{f}(r)rJ_0(2\pi qr)dr$$

$$\mathbf{f}(r) = 2\pi\int_0^{\infty}\mathbf{F}(q)qJ_0(2\pi qr)dq. \quad \blacksquare$$

Alguns *pares de transformadas* são mostrados:

$$\frac{1}{r} \leftrightarrow \frac{1}{q} \qquad e^{-\pi r^2} \leftrightarrow e^{-\pi q^2} \qquad \frac{1}{a^2+r^2} \leftrightarrow 2\pi K_0(2\pi aq)$$

$$\Pi\left(\frac{r}{2}\right) \leftrightarrow \frac{J_1(2\pi q)}{q} \qquad \frac{\delta(r)}{\pi r} \leftrightarrow 1.$$

Transformada 2D de Hadamard.

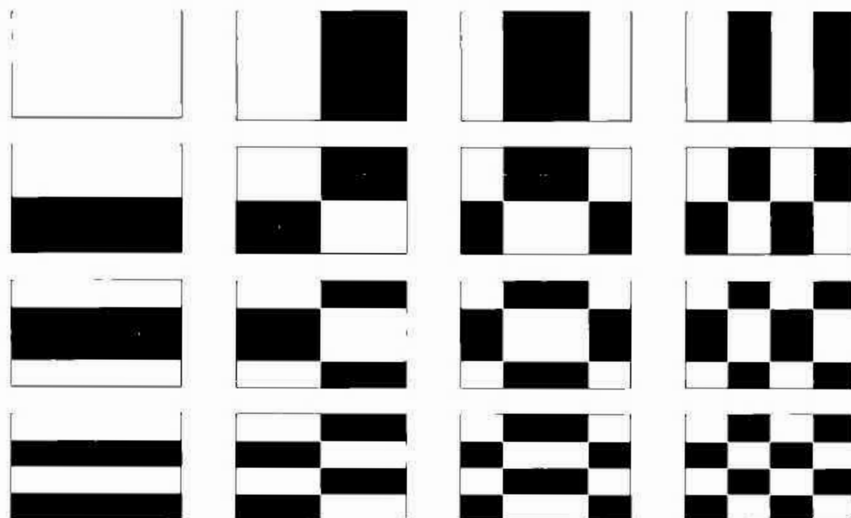
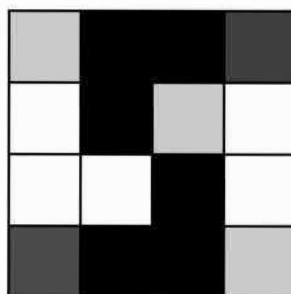


Figura 2.38 Base 2D da transformada de Hadamard.

Exercício 13

(PROCESSAMENTO DE IMAGENS). Uma imagem simples é quantizada em 4 níveis, podendo assumir os níveis -3, -1, +1, +3.

a) Os níveis de cinza correspondem a uma escala (-3 preto...+3 branco). Observando a imagem, encontre a matriz bidimensional do sinal de imagem.



b) Realize a decomposição de Hadamard 2-D (indique os valores dos coeficientes C_{ij} Hadamard-Fourier). Encontre a matriz 2-D do sinal sintetizado pela decomposição e compare com a matriz obtida no item anterior. ■

Imagens de Raios X e Tomografia Computadorizada

<<Of course it is all the Fourier transform>>. **Lawrence Bragg** (Nobel de Física), comentário do pioneiro em cristalografia durante uma conferência.

Os raios X constituem uma das mais antigas, simples, indolores, não invasivas e eficientes tecnologias de imagens médicas [ALD&UNS 1996]. Outras técnicas relacionadas não lidam apenas com uma imagem bidimensional. Tanto a tomografia computadorizada quando a ressonância magnética (MRI) compartilham a mesma forma de criação de imagens – os dispositivo físico adquire uma batelada de sinais 1-D associados a várias rotações angulares [HEA&WEA 1992]. Valores

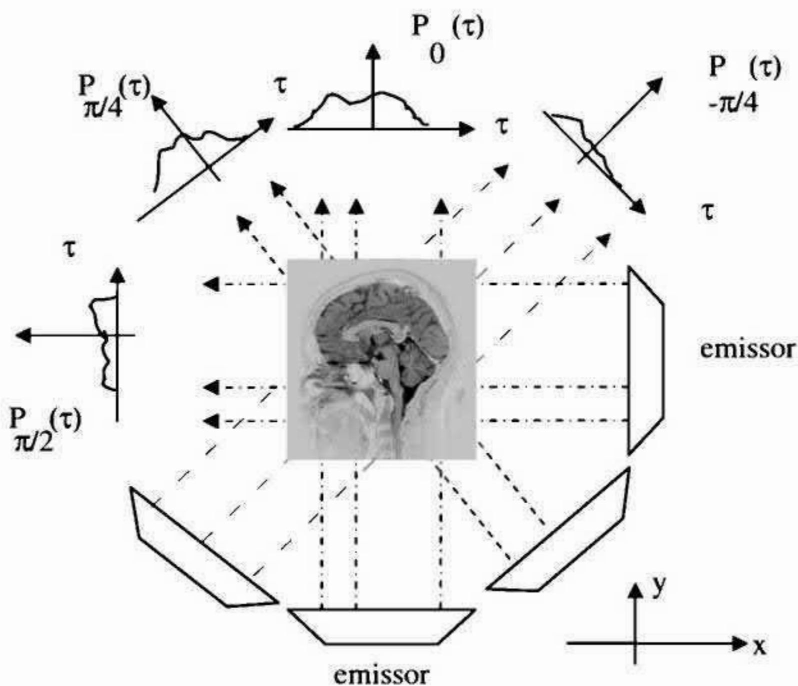


Figura 2.39 Reconstrução de projeções via imagens seccionais.

típicos envolvidos nestes processos são especificados a seguir.

Técnica	tamanho da imagem	resolução	profundidade de pixel
CT raios X	512 × 512 *pixel*	2 *linhas/mm*	12 bits
MRI	256 × 256	1 *pixel/mm*	12 bits

O processo de reconstrução de projeções é usado na formação de imagens seccionais a partir de um conjunto de projeções. Inicialmente, o emissor irradia o objeto de interesse $x(t_1,t_2)$ resultando em projeções $\{P_\theta(\tau)\}$, $0\leq\theta\leq\pi$ (a variável normalmente é discretizada). A figura anterior ilustra este procedimento.

Reconstrução de imagens médicas.

Um dos algoritmos básicos no processamento de imagens médicas (incluindo ressonância magnética e tomografia computadorizada) é aquele da reconstrução a partir de projeções [STE 2004]. Assim, os aparelhos "medem" $P_\theta(\tau)$ em vários ângulos (e.g., cada 15°). Na reconstrução, calcula-se a transformada 1D das projeções $\mathrm{P}_\theta(\varpi)$.

$$P_\theta(\tau)\leftrightarrow \mathrm{P}_\theta(\varpi).$$

Como $\mathrm{P}_\theta(\varpi)=F(\varpi\cos\theta,\varpi\, sen\,\theta)$, o teorema da projeção fatiada[27] [WRI 1997] estabelece que $F(\Omega_1,\Omega_2)$ corresponde à uma transformada de Fourier bidimensional de $f(x,y)$; e a imagem pode ser reconstruída via transformada discreta 2D inversa de Fourier.

A projeção $P_\theta(\tau)$ é obtida como

$$P_\theta(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau\cos\theta-\zeta\, sen\,\theta,\tau\, sen\,\theta+\zeta\cos\theta)d\zeta .$$

Para $\theta=0$, tem-se $P_0(\tau)=-\log\left(\frac{I(\tau)}{I_0(\tau)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau,\zeta)d\zeta$, em que I é a intensidade de fótons /seg. Assim: $I(\tau)=I_0(\tau)e^{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau,\zeta)d\zeta}$.

A cada projeção, associa-se a sua transformada de Fourier, definindo o par transformada $P_\theta(\tau)\leftrightarrow P_\theta(\omega)$.

$$P_\theta(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_1,t_2)e^{-j(w\cos\theta_1+w\, sen\,\theta_2)}dt_1dt_2=X(w\cos\theta,w\, sen\,\theta),$$

em que $x(t_1,t_2)\leftrightarrow X(\Omega_1,\Omega_2)$.

---

[27] Originariamente devido sir **Lawrence Bragg** (*Proc. Roy. Soc.* A, vol.123, pp.537-559,1929).

Análise de Sinais não Estacionários

CAPÍTULO 3

3.1 ANÁLISE ESPECTRAL PARA SINAIS NÃO-ESTACIONÁRIOS

A Transformada clássica de Fourier (capítulo 2) inclui implicitamente uma hipótese sobre a estacionaridade dos sinais. Uma análise espectral adequada aos sinais não estacionários requer mais do que a transformada $\Im$ e demanda a introdução de uma dependência no tempo na análise de Fourier, se possível, preservando a linearidade. Os sinais não devem ser tratados exclusivamente no domínio t ou domínio f, mas em ambos (espaço conjunto tempo-freqüência)! A questão fundamental é: "*como apresenta noções sobre a análise espectral de sinais não estacionários*?". A discussão a seguir, pouco rigorosa, procura apenas despertar interesse e introduzir conceitos [refira-se a deO, 2007].

A idéia da Transformada de Fourier de Tempo curto STFT (ou Transformada de Gabor) é introduzir um parâmetro de freqüência local (local no tempo) como se a *Transformada de Fourier Local* observasse o sinal através de uma curta "janela" dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário[28]. Necessita-se agora de uma representação bidimensional $F(t,w)$ do sinal $f(t)$, composta por características espectrais dependentes do tempo [COI&MEY 1991].

A transformada local observa $f(t)$ "através" de uma janela $J(t)$ centrada no instante de tempo e de extensão "limitada", antes do cálculo do espectro. Formalmente,

$$STFT(\tau,w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)J^{*}(t-\tau)\,e^{-jwt}\,dt\,.$$

[28] Apropriadamente ditas como transformadas de Fourier à janelas deslizantes.

Existem diversas escolhas para a janela, mas uma vez fixada a janela para a STFT, a resolução no tempo e na freqüência *f* e *t* permanece constante em todo o plano *t-f*.

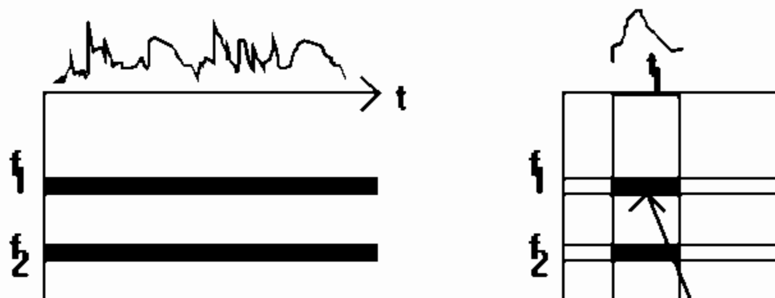


Figura 3.1 Transformada de Fourier em tempo curto.

Uma alternativa para abordar o problema no *plano conjunto tempo-freqüência* consiste em permitir uma resolução variável no tempo. Intuitivamente, quando a análise é visualizada como um banco de filtros, a resolução no tempo deveria aumentar com o aumento da freqüência central dos filtros, ou seja, realizar a análise em banco de filtros compostos por passa-faixas com banda passante relativa constante (ou fator de qualidade *Q* constante). Agora, para *Q*-constante, vê-se que as resoluções *t* e *f* mudam com a freqüência central, satisfazendo ainda o princípio da Incerteza de Gabor-Heisenberg. A resolução no tempo torna-se arbitrariamente boa para altas freqüências, enquanto que a resolução em freqüência torna-se arbitrariamente boa para baixas freqüências. A figura em seguida explicita este comportamento [RIO&VET 1991].

Na Transformada de Wavelet contínua, CWT, todas as respostas ao impulso no *banco de filtros* são versões escalonadas (expandidas ou comprimidas) de uma mesma $\psi(t)$, chamada de wavelet básica. Assim, para $a \neq 0$,

$$CWT := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \, .$$

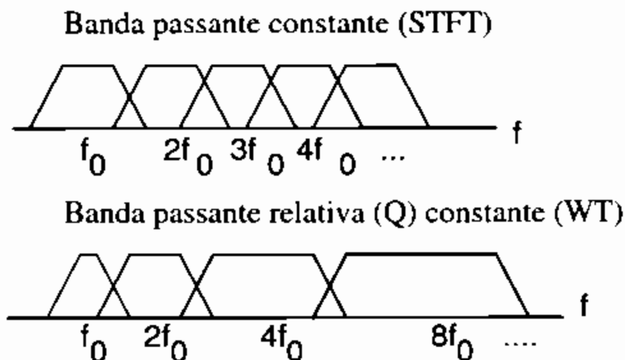


Figura 3.2 Análise Espectral com banco de Filtros- (a) STFT e (b) WT.

O parâmetro de escala $\underline{a}$ usado em wavelets tem interpretação idêntica à escala empregada em mapas cartográficos: Escalas maiores fornecem visões globais, enquanto que escalas menores proporcionam visões mais detalhadas.

As Transformadas de Wavelets foram introduzidas nos meados anos 80 pela Escola Francesa (Morlet, Grossmann, Meyer, Battle, Lemarié, Torrésani, etc.), originárias de estudos de curta duração associada a pacotes de ondas acústicas sísmicas [HUBB 1995]. O termo cunhado originariamente era *ondellettes*, que significa algo como "ondinhas" e *wavelets* correspondem a uma versão anglofônica. Qualitativamente, duas características são exigidas para uma função $\psi(.)$, chamada de wavelet-mãe: Oscilação (associada com termo "ondas"); e decaimento rápido no tempo – curta duração (associada com o diminutivo "ondinhas"). Todas as funções usadas como *núcleos da transformação* correspondem a versões comprimidas/expandida de uma mesma onda mãe.

Uma das deficiências da análise via Transformada de Fourier é que ela não apresenta um caráter local. Todo o sinal, desde o começo dos tempos (-∞) até o fim dos tempos (+∞) é levado em consideração. A transformada de Fourier representa um "comportamento global médio" do sinal. Já existe disponível um grande número de livros-texto sobre o assunto (vide http://www.non.com/books/Wavelets_cc.html)

Ao invés de interpretar os parâmetros nos domínios tempo e freqüência ($f \times t$), costuma-se utilizar os domínios escala e deslocamento ($a \times b$).Uma interpretação interessante está associada a lidar com imagens tipo "mapas". Uma mudança de escala pode permitir, numa escala maior,

ter uma visão mais global, mas com menor precisão. Já em uma escala menor, vê-se detalhes, mas perde-se em estudar o comportamento global. Esse conceito deriva de um tipo de Princípio da Incerteza Gabor-Heisenberg. O parâmetro de deslocamento permite deslocar (parâmetro local) o foco da atenção para outra parte do mapa. Numa escala 1:100000 é possível ter uma idéia do Brasil como um todo (mapa do Brasil), porém já numa escala 1:1000, pode-se analisar detalhes de uma cidade, perdendo-se a noção do todo. O que é melhor? Quem já usou mapas sabe que depende do que se quer investigar!

A primeira menção sobre wavelets aparece no apêndice da tese de doutorado de **Alfred Haar** em 1909, onde se fala em análise escalonada. Wavelets de Haar, embora de suporte compacto (anula-se completamente fora de um intervalo finito de tempo), não são continuamente diferenciáveis. No início da década de 80, **Alex Grossman** e **Jean Morlet** introduziram as wavelets [GRO&MOR 1984]. Em 1989, **Stéphane Mallat** estabeleceu a ligação desta teoria com o processamento digital de sinais, particularmente com os filtros espelhados em quadratura, e com algoritmos piramidais [MALL 1989]. **Yves Meyer** construiu uma das primeiras wavelets não triviais, continuamente diferenciáveis (embora não fossem de suporte compacto). **Ingrid Daubechies** construiu o mais usado conjunto de wavelets ortogonais [DAU 1988].

Uma das grandes desvantagens da análise de Fourier (espectro) provém do fato de que ela apresenta apenas resolução na freqüência e não no tempo. Isto significa que, embora capaz de determinar o conteúdo de freqüências presentes em um sinal, não há noção de quando (em que intervalo de tempo) elas ocorrem. As wavelets têm uma larga gama de aplicações, incluindo: visão computacional e humana, radar, computação gráfica, hidrodinâmica, astronomia, predição de terremotos e maremotos, turbulência, compressão de imagens, descontaminação de sinais, tons musicais, estatística, análise de sinais médicos (eletrocardiogramas, eletroencefalogramas etc.), espalhamento em banda larga, modelagem de sistemas lineares, modelagem geométrica, análise de transitório e falhas em linhas de potência, visualização volumétrica, não sendo esta lista nem de longe exaustiva.

3.2 WAVELETS: UMA EVOLUÇÃO NA REPRESENTAÇÃO DE SINAIS



Jean Morlet (1931-2003)
(© crédito de foto da Association Marius LAVET, França, cortesia).

Apresenta-se a seguir uma ligeira introdução a esta classe de transformadas. O produto interno Hermitiano convencional é usado: $< f(x), g(x) >:= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx$.

Considere os seguintes espaços de sinais de energia:

(i) $L^2(\mathbb{R})$ espaço das funções $f(x)$ de quadrado integrável segundo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^2 dx < +\infty.$$

(ii) $L^2(\mathbb{R}\text{-}\{0\}\times\mathbb{R})$ espaço de funções $f(x,y)$, $x\neq 0$ de quadrado integrável segundo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x,y)|^2 \frac{dxdy}{x^2} < +\infty . \blacksquare$$

A Teoria mais formal considera dois parâmetros a e b conhecidos como escala e deslocamento, respectivamente. Para $a\neq 0$, define-se:

$$\text{CWT}(a,b) := a^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* (\frac{t-b}{a}) dx = <f(t), \psi_{a,b}>.$$

O termo $a^{-1/2}$ é um fator de normalização da energia do sinal e $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $a \neq 0$ é uma transformada afim. Assim, uma wavelet $\psi_{a,b}(t)$ é definida por um mapeamento afim unitário. Esta wavelets são versões transladadas (b) e dilatadas/comprimidas (a) de uma mesma wavelet-mãe $\psi(t)$.

$\psi(t)$ wavelet-mãe $\psi(t) \in L^2(\boldsymbol{R})$. $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(t)dt < +\infty$ e $E_\psi = <\psi, \psi>$.

Operações:

a) escalonamento $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$, $a \neq 0$.

b) deslocamento $\psi_{a,b}(t) = \psi_a(t-b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. ■

$\{\psi(t)\} \to \{\psi_{a,b}(t)\}$ $(\forall a, a \neq 0)$ $(\forall b \in \boldsymbol{R})$.

O ajuste na amplitude do sinal escalonado foi introduzido visando garantir a isomeria: todas as *ondellettes* têm a mesma energia!

<u>Proposição</u>. $\| \psi(t) \|^2 = \| \psi_{a,b}(t) \|^2$ i.e. $E_\psi = E_{\psi_{a,b}}$. ■

Constatando este fato:

$<\psi_{a,b}, \psi_{a,b}> = E_{\psi_{a,b}} = \| \psi_{a,b} \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}^2(t)dt$. Substituindo a relação $\psi_{a,b}(t)$ em termos de $\psi(t)$:

$E_{\psi_{a,b}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$. Fazendo a mudança de variável $\zeta = \frac{t-b}{a}$ e $d\zeta = \frac{dt}{a}$. Então $E_{\psi_{a,b}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(\zeta)d\zeta = E_\psi$ **Q.E.D.**

A escolha das wavelets como sendo versões $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ garante a mesma energia para qualquer wavelet!

De fato, WT deve ser vista como uma transformação (mapeamento W_ψ) do espaço de funções em $L^2(\boldsymbol{R})$ em $L^2(\boldsymbol{R} - \{0\} \times \boldsymbol{R})$. Esta transformação é isométrica, i.e., a energia do sinal (métrica) é preservada.

A energia de um sinal transformável pode ser obtida no domínio do tempo, no domínio da freqüência ou no domínio *wavelets* (tempo-freqüência), como:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 \, df = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |CWT(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2}.$$

A análise espectral constitui uma das ferramentas clássicas mais poderosas e mais utilizadas no estudo e processamento de sinais determinísticos ou estocásticos. Uma teoria muito mais potente e geral foi introduzida pela escola francesa nos meados dos anos 80 [HUBB, 1995], a qual evoluiu rapidamente para uma área própria. A **Transformada de Wavelet** constitui uma ferramenta moderna que permite a unificação de um grande número de técnicas de análise e processamento, como análise de imagens, codificação em sub-bandas, análise multirresolução para visão artificial em computadores e modelagem de sistemas variantes no espaço-tempo. Ela inclui a Série de Fourier, a Transformada de Fourier, a Transformada de Gabor de Tempo Curto, Espectrogramas, por exemplo, como casos particulares, permitindo a análise de sinais não-estacionários, incluindo sinais banda larga [YOU 1993]. O emprego de wavelets em processamento de voz tem sido especialmente atrativo, especialmente devido ao fato de que os modelos mais apropriados para a resposta de freqüências da Cóclea no ouvido humano empregaram filtros com fator de qualidade constante (*constant-Q analysis*). Na área de Engenharia Biomédica, elas vêm se revelando particularmente atrativas [AKAY 1997], [ALD&UNS 1996], [RICH 1995], [UNS&ALD 1996]. Aplicações em Engenharia Mecânica podem ser encontradas alhures, e.g. [LIN&QU 2000], [RUZZ *et al.* 1997]. Outras aplicações recentes envolvem modulação digital [deO *et al.* 2003a] e sistemas de multiplex em comunicações [deO&BOU 2006].

Por que wavelets? Em que esta ferramenta pode ser mais potente que a análise espectral clássica de Fourier? Característica central: sinais de curta duração e com variações muito rápidas. Este é o caso típico de perturbações transitórias. Ao contrário da transformada de Fourier, as transformadas de wavelet quase nunca se prestam para cálculos analíticos, mesmo nos casos mais simples. Invariavelmente os cálculos são numéricos, mas os resultados extremamente práticos e de rica interpretação. Uma boa referência sobre o assunto é [BURR *et al.* 1997].

Wavelets Contínuas

A análise clássica de Fourier estabelece que um sinal pode ser representado por uma soma infinita de termos em seno e cossenos, mais conhecida como a expansão de Fourier. A Transformada de Fourier (T.F.) tem grandes vantagens, mas algumas desvantagens. A maior destas é o fato da T.F. poder determinar todas as freqüências presentes no sinal, porém sua relação com o domínio temporal inexiste. A transformada de Fourier não fornece uma análise temporal, apenas freqüencial.

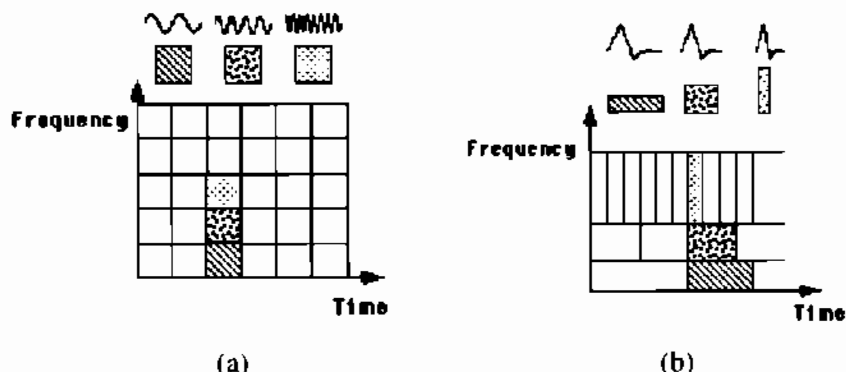
Para superar este problema, várias soluções foram encontradas objetivando ter uma análise, ao mesmo tempo, temporal e freqüêncial de sinais não estacionários. A primeira delas foi a Transformada de Fourier de Tempo Curto (*STFT – Short Time Fourier Transform*), ou também conhecida como a Transformada de Gabor. A idéia da STFT é introduzir um novo parâmetro de freqüência local (local no tempo) como se a "Transformada Local" observasse o sinal através de uma curta janela dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário. Precisa-se então de uma representação bidimensional $F(t,w)$ do sinal $f(t)$, composta por características espectrais dependentes do tempo.

A transformada local observa o sinal $f(t)$ através de uma janela $J(t)$ centrada no instante de tempo τ e de extensão "limitada".

Existem várias escolhas para a janela, sendo a mais comum a janela Gaussiana. O detalhe mais importante é que uma vez fixada a janela para a STFT, a resolução no tempo (t) e na freqüência (f) permanece constante em todo o plano t-f. Os problemas na resolução do tempo e da freqüência são resultados de um fenômeno físico conhecido como o Princípio de Heisenberg (em um sinal, é impossível conhecer a freqüência exata e o tempo exato de ocorrência desta freqüência). Este fenômeno é indiferente em relação à transformada usada. A maneira de se analisar o sinal é usando uma forma alternativa de análise, chamada de Análise Multi-Resolucional (AMR). Como o próprio nome indica, ela analisa o sinal em freqüências diferentes com diferentes resoluções.

Impõe-se uma alta resolução no tempo e baixa resolução na freqüência, para freqüências mais altas; uma resolução freqüêncial alta e resolução temporal baixa para freqüências mais baixas. Isto devido ao fato de sinais com componentes em alta freqüência apresentarem rápidas alterações no domínio temporal, enquanto que sinais com componentes de baixa freqüência possuem alterações mais lentas no domínio temporal.

A Transformada de Wavelet foi desenvolvida como uma alternativa à STFT para solucionar o problema da resolução. A análise via wavelets é feita similarmente à análise com STFT, no que diz respeito à multiplicação do sinal por uma função (que neste caso será a wavelet e não mais a janela $J(t)$, como na STFT). A transformada é calculada separadamente por segmentos diferentes do sinal no domínio do tempo.



(a) (b)

Figura 3.3 Resolução no plano *t-f* via análise (a) STFT (b) Transformada de Wavelet .

As wavelets foram introduzidas em um estudo sobre as variações sismológicas ao se constatar que a análise de Fourier não estava sendo eficiente durante as repentinas variações do sinal. As wavelets se desenvolveram nos campos da matemática, engenharia, na física quântica.

As wavelets são funções matemáticas que separam sinais em suas diferentes componentes, e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala. Elas têm vantagens em relação à análise de Fourier, pois esta última analisa o sinal como um todo, acarretando representação pobre para sinais que contêm descontinuidades e/ou variações bruscas.

A idéia fundamental da Transformada de Wavelet é que ela é uma transformada pontual e proporcional à escala. Ela analisa o sinal em escalas diferentes e se desloca analisando cada ponto do sinal.

A Transformada de Wavelet Contínua (CWT) pode ser escrita em formato similar à STFT:

$$CWT(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} . \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \; ,$$

em que τ (tau) e a são os parâmetros translação e escala, respectivamente. A função $\psi(t)$ se modifica no decorrer da transformada e é conhecida como *wavelet-mãe*. O termo mãe vem do fato que funções com diferentes tamanhos são usadas no processo da transformada e todas são originadas de uma wavelet principal, a wavelet-mãe. Ela é um protótipo para a geração de outras funções janela.

O parâmetro *translação* se relaciona com a localização da "janela". Analisa-se o sinal aos poucos. Este termo corresponde, obviamente à informação de tempo no domínio da transformada. Processa-se o conteúdo que estiver dentro da janela.

O parâmetro *escalonamento* é o processo de compressão e dilatação do sinal. É similar ao conceito de escala quando se fala em mapas. As altas escalas correspondem a uma visão global do sistema, enquanto que as baixas escalas correspondem a uma visão mais detalhada [GRA 1995], [deO 2007].

Em termos matemáticos, escolhida uma função $f(t)$, $f(s.t)$ corresponde a uma versão:

- Comprimida, se $s>1$;
- Expandida, se $s<1$.

No caso da transformada de wavelet, o parâmetro escala aparece no denominador. Neste caso teremos uma versão:

- Comprimida, se $s<1$;
- Dilatada, se $s<1$.

Todas as "janela"s a serem utilizadas são versões dilatadas e comprimidas da wavelet-mãe. A transformada de Fourier tem como função base os senos e cossenos que são funções ortogonais entre si. Esta ortogonalidade resulta em propriedades desejáveis na reconstrução do sinal [GRO&TORR 2001].

A transformada de wavelet pode ser agora analisada sob outro prisma. Sabe-se que o produto interno de duas funções é dado por:

$$< f(t), g(t) >= \int_a^b f(t).g^*(t)dt .$$

Comprova-se que a transformada de wavelet nada mais é do que o produto interno da função $f(t)$ com uma função de base $\psi(a,b)$ multiplicada por uma constante:

$$CWT(a,b) =< f(t), \psi(a,b;t) > .$$

A transformada de wavelet não tem apenas uma função-base, como na T.F. Muito pelo contrário, pode ter infinitas funções-base. Existe um grande número de funções que podem ser consideradas como wavelets-mãe.

Uma condição necessária para definir se uma função pode ser uma wavelet é assegurar que ela é oscilatória (onda=*wave*), ou melhor,

que seu valor médio no domínio temporal é nulo. Matematicamente falando, deve-se satisfazer o seguinte critério:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0 .$$

A Transformada de Wavelet é uma transformada reversível e aplicável ao Teorema de Parseval, desde que satisfaça a condição de admissibilidade, mostrada a seguir.

Dado o "par transformada" de Fourier: $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad \text{e daí} \quad |\Psi(w)|^2{}_{w=0} = 0 .$$

O escalonamento é o processo de compressão e dilatação do sinal. O parâmetro de escala "a" usado em wavelets tem interpretação *grosso modo* idêntica à escala empregada em mapas cartográficos. As altas escalas correspondem a uma visão global do sistema, enquanto que as baixas escalas correspondem a uma visão mais detalhada.

O termo $|a|^{-1/2}$ é um fator de normalização da energia do sinal e $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, $a \neq 0$ é uma transformada afim. Assim, uma wavelet $\psi_{a,b}(t)$ é definida por um mapeamento afim unitário. Esta wavelets são versões transladadas (b) e dilatadas/comprimidas (a) de uma mesma onda protótipo, chamada wavelet-mãe $\psi(t)$.

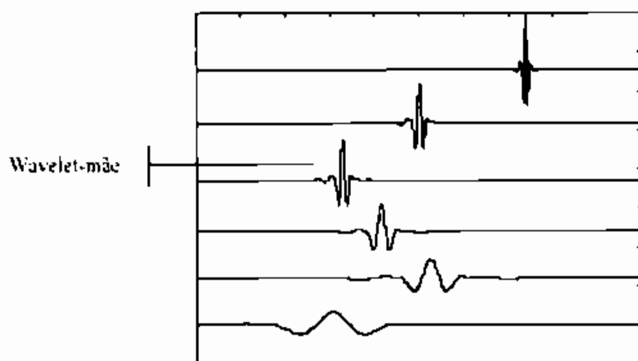


Figura 3.4 Wavelet-mãe *Symmlet* 8 em diferentes escalas e localizações.

Demonstra-se que a condição para uma função ser uma wavelet-mãe (Condição de admissibilidade), $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$, $C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty$.

Esta condição implica que $\Psi(0)=0$ de modo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$ (a ondinha tem valor médio nulo).

Mostra-se que neste caso, uma Transformada Inversa de Wavelet pode ser obtida como

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} CWT(a,b) \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\} \frac{da\,db}{a^2}.$$

Uma das primeiras transformadas WT corresponde a **Wavelet de Morlet**, cuja wavelet-mãe é $\psi(t)=\exp(-t^2/2).\exp(jw_0 t)$. Note que ela corresponde a um BPF gaussiano.

De fato, a WT deve ser vista como uma Transformação (mapeamento W_ψ) do espaço de funções definidas de $L^2(\boldsymbol{R})$ em $L^2(\boldsymbol{R}-\{0\}\times\boldsymbol{R})$. Esta transformação é isométrica, i.e., a energia do sinal (métrica) é preservada.

A energia de um sinal transformável pode ser obtida no domínio do tempo, no domínio da freqüência ou no domínio Wavelets (tempo-freqüência), como

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 \, df = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |CWT(a,b)|^2 \frac{da\,db}{a^2}.$$

Para uma escala arbitrária $a \neq 0$, $a>0$, CWT(a,b)= $a^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$.

Portanto, CWT(a,0)= $a^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t}{a}\right)dt$ pode ser desenvolvida em série de Taylor nas proximidades do ponto a=0 resultando[29]:

CWT(a,0)=

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[f(0)M_0 a + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} M_1 a^2 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} M_2 a^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} M_n a^{n+1} + \mathrm{O}(a^{n+2}) \right]$$

29 Assumindo condições de regularidade sobre $f(.)$ e CWT(.,0).

em que $M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi(t)dt$ é o momento de ordem n da wavelet-mãe. Note que a condição de admissibilidade corresponde a $M_0=0$ [GOM *et al.* 1987]. Observe que $M_n = \Psi^{(n)}(w)|_{w=0} = \Psi^{(n)}(0)$. Freqüentemente as wavelets são classificadas em famílias de acordo com o número de momentos nulos (*vanishing moments*).

Uma wavelet é dita ser de N momentos nulos *se e só se* $M_n=0$ $\forall n \leq N-1$. Este conceito desempenha um papel importante na construção de wavelets.

A Transformada Inversa (CWT^{-1}) e a Condição de Admissibilidade

Sejam $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\psi_{a,b}(t) \in L^2(\mathbb{R}-\{0\} \times \mathbb{R})$. Sob que condições é possível "pegar uma onda"? (*catch the wave...*)

A condição de admissibilidade implica em escolher uma wavelet protótipo tal que

$$\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w) \text{ e } C_\psi = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{|\Psi(\zeta)|^2}{|\zeta|} d\zeta < +\infty .$$

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} CWT(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} .$$

A recuperação do sinal a partir da transformada de wavelet CWT(a,b) para $\psi(t)$ obedecendo a condição de admissibilidade pode ser feita pela fórmula supra-citada. Observe que se usa essencialmente o mesmo núcleo da transformada, $\psi_{a,b}(t)$, exceto pelo conjugado complexo. A wavelet utilizada no processo de reconstrução é referida sempre como wavelet dual. Por isso, $\psi^*(t)$ é chamada de "dual" da wavelet $\psi(t)$. Entretanto, é possível obter uma formula de inversão sob condições menos restritivas.

Definição (*Wavelets diádicas*). Uma wavelet $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$, é dita ser uma wavelet diádica se e somente se satisfaz à condição de estabilidade, i.e.,

$\exists$ A,B $\in \mathbb{R}$ | 0<A≤B<+∞ tais que $A \leq \sum_{m \in Z} |\Psi(2^{-m} w)| \leq B$. ■

Mostra-se [FOU 1995] que as wavelets diádicas possuem uma fórmula de reconstrução a partir de uma outra wavelet, $\tilde{\psi}$, uma wavelet dual de ψ. Normalmente não há uma única wavelet dual para uma dada wavelet diádica ψ. Para uma wavelet básica de espectro $\Psi(w)$, a wavelet dual tem espectro que satisfaz a seguinte relação: $\sum_{m\in Z}\Psi^*(2^{-m}w)\tilde{\Psi}(2^{-m}w)=1$.

Estas wavelets não obedecem a condição de admissibilidade (porém obedecem uma condição de estabilidade, menos restringente) e não são wavelets ortogonais[30]. A recuperação (fórmula de transformada inversa) se faz com o auxílio da wavelet dual.

Exemplos: Um mar de Wavelets

Existe um grande número de funções que podem ser eleitas como wavelets-mãe. Trata-se de uma apresentação sem maiores pretensões. A idéia é apenas ilustrar a variedade e os formatos de algumas wavelets unidimensionais interessantes, sem apresentar detalhes formais.

Tabela I.3 Nome da família de Wavelets

'haar'	Haar wavelet.
'db'	Daubechies wavelets.
'sym'	Symlets.
'coif'	Coiflets.
'bior'	Biorthogonal wavelets.
'rbio'	Reverse biorthogonal wavelets.
'meyr'	Meyer wavelet.
'dmey'	Discrete approximation of Meyer wavelet.
'gaus'	Gaussian wavelets.
'mexh'	Mexican hat wavelet.
'morl'	Morlet wavelet.
'cgau'	Complex Gaussian wavelets.
'shan'	Shannon wavelets.
'deO'	**de Oliveira wavelets.**
'legd'	**Legendre wavelets.**
'mth'	**Mathieu wavelets.**
'Cheby'	**Chebyshev wavelets**
'Gegen'	**Gegenbaur wavelets**
'beta'	**Beta wavelets**
'fbsp'	Frequency B-Spline wavelets.
'cmor'	Complex Morlet wavelets. ■

[30] Em alguns textos, referidas como pré-wavelets.

Algumas wavelets práticas são apresentadas ou rapidamente comentadas a seguir. Em alguns casos, a apresentação envolve a função de escala, relacionada com a wavelet. Esta função escala é por vezes referida como wavelet-pai [BULT 1995].

❶ Wavelet de Haar

No caso de alguns sinais tais como imagens contendo fronteiras pronunciadas (mudanças abruptas de contraste) ou outras descontinuidades, a análise e síntese de Fourier não são muito apropriadas para acomodar os termos de altas freqüências, os quais não têm efeitos localizados *nesta análise*. Por simplicidade, considera-se um sinal constante por partes. Nestes casos, bases de sinais constantes por partes (e.g. Haar) podem ser mais adequadas.

$$\psi^{(H)}(t) := \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 < t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As primeiras oito wavelets para uma decomposição de Haar são esboçadas a seguir [FOU 1995], [PER&WAL 2000]. Estas são versões do tipo "wavelet digital".

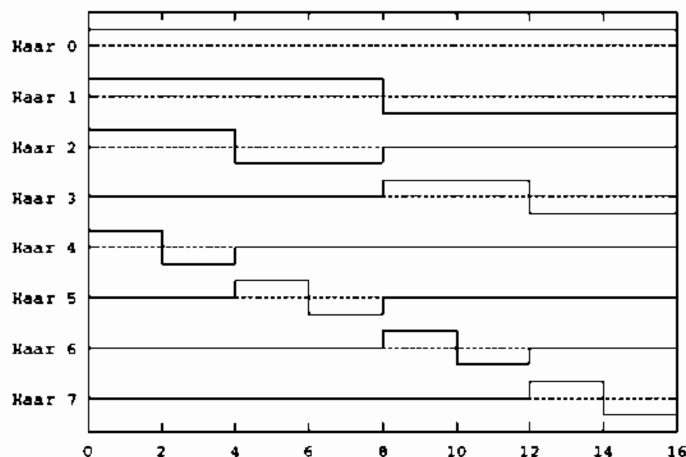


Figura 3.5 As Wavelets de Haar (decomposição com oito wavelets).

Um sinal de teste (constante por partes) é mostrado na figura que se segue.

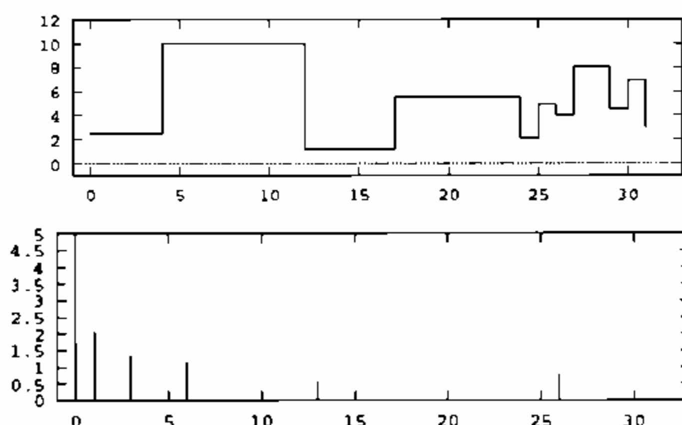


Figura 3.6 (a) Um sinal 1-D de teste, constante por partes. (b) Espectro de Haar.

❷ Wavelet Sombrero

Assumindo uma $\rho(t)$ Gaussiana, segue-se que $-\rho''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t^2-1)e^{-t^2/2}$. A função $\psi(t) = -\rho''(t)$ é conhecida como wavelet sombrero (chapéu mexicano), por razões óbvias.

$$\psi^{(Mhat)}(t) = \frac{2(t^2-1)e^{-t^2/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}}.$$

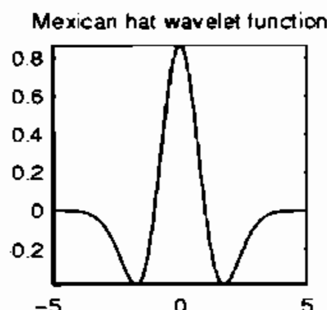


Figura 3.7 Wavelet Sombrero. Visualização no Matlab®.

❸ Wavelet densidade Gaussiana

Uma wavelet simples derivada (Derivadas de maior ordem podem ser usadas) da função densidade gaussiana (gaus1) é dada por:

$$\psi^{(fdG)}(t) = gaus1 := \frac{\sqrt{2}te^{-t^2/2}}{\pi^{1/4}}.$$

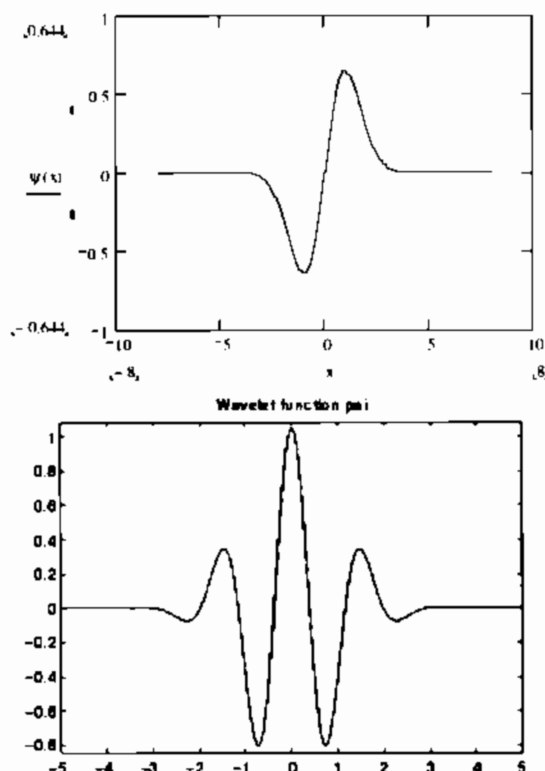


Figura 3.8 Wavelet derivada da densidade de gaussiana: gaus1 e gaus8.

❹ Wavelet complexa de Morlet

Morlet propôs uma das primeiras wavelet de interesse na análise de sinais. Em sua investigação de sinais geofísicos (exploração de petróleo), empregou a wavelet complexa dada a seguir [GOU-GRO&MOR 1984].

$$\psi^{(Mor)}(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-t^2/2}e^{-jw_0t}.$$

De fato, rigorosamente, o sinal de Morlet não constitui uma wavelet, mas pode ser assim considerada (aproximadamente) para grandes valores de w_0. [KUM&FOU 1997].

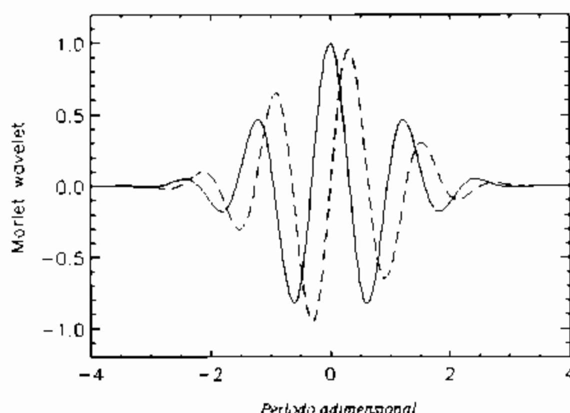


Figura 3.9 Wavelet complexa de Morlet. (parte real e parte imaginária).

<u>❻ Wavelet de Shannon</u>

A análise correspondente aos filtros passa-faixa ideais define uma decomposição usando wavelets conhecidas como wavelets de Shannon, cujo formato é mostrado na figura a seguir.

Espectro da Wavelet real:

$$\Psi(w) = \prod\left(\frac{w - 3\pi/2}{\pi}\right) + \prod\left(\frac{w + 3\pi/2}{\pi}\right),$$

em que $\prod(t) := \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ é a função porta (normalizada).

Tomando a transformada inversa:

$$\psi^{(Sha)}(t) = Sa\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right), \text{ ou } \psi^{(Sha)}(t) = 2.sinc(2t) - sinc(t).$$

É uma wavelet classe C^{∞}, mas decresce muito lentamente no infinito e não tem suporte compacto [http://en.wikipedia.org/Shannon_wavelet].

Assumindo t=2x+1, $\psi^{(Sha)}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\text{sen}(2\pi(x+1)) - \text{sen}(2\pi x)}{2x+1}$.

No caso da wavelet complexa, pode-se usar $\psi^{(CSha)}(t) = Sinc(t)e^{-j2\pi t}$.

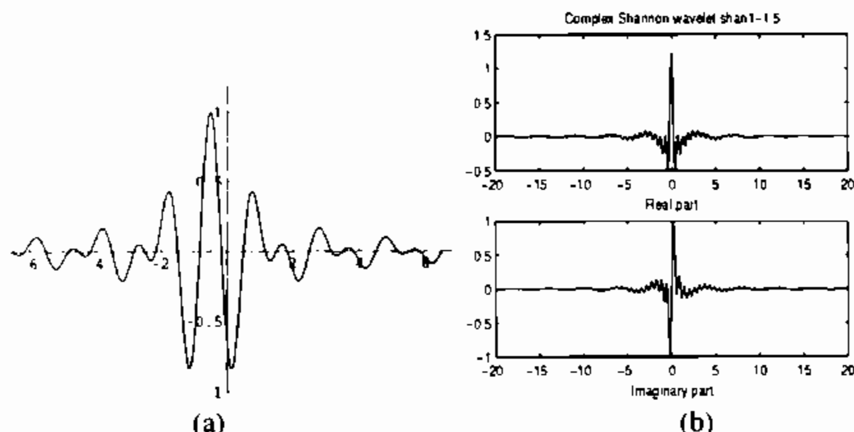


Figura 3.10 (a) Wavelet de Shannon. (b) Wavelet complexa de Shannon (Matlab®).

Constata-se facilmente que esta wavelet tem suporte infinito (i.e., $\nexists M$ tal que $|\psi(t)|=0 \quad \forall |t|>M$). Sinais limitados na freqüência não podem ser limitados no tempo (vide seção 2.4).

➏ Wavelet de Meyer

A wavelet de Meyer é definida no domínio freqüencial como [MEY *et al.* 1987], [MEY 1990]:

$$\Psi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{sen}\left[\frac{\pi}{2}\upsilon\left(\frac{3|w|}{2\pi}-1\right)\right]e^{jw/2} & 2\pi/3 \le |w| \le 4\pi/3 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\left[\frac{\pi}{2}\upsilon\left(\frac{3|w|}{4\pi}-1\right)\right]e^{jw/2} & 4\pi/3 \le |w| \le 8\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

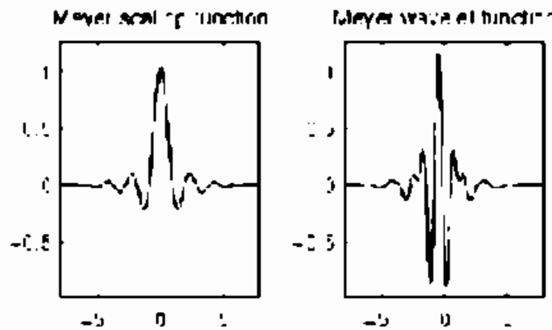


Figura 3.11 Wavelet de Meyer: (a) função de escala (b) wavelet.

❼ <u>Wavelets de Daubechies</u>

Um dos atrativos da análise de Fourier decorre do fato das ondas usadas na decomposição serem ortogonais. As primeiras wavelets ortogonais obtidas, incluindo wavelet de Meyer e de Battle-Lemarié, não apresentam suporte compacto. Já as wavelets de Haar são ortogonais e de suporte compacto, porém não são diferenciáveis (não apresentam suavidade). Um dos maiores desafios da teoria de wavelets foi a construção de uma família de wavelets ortogonais de suporte compacto. A regularidade das wavelets de Daubechies aumenta linearmente com *N*, porém a preço de aumentar o comprimento do suporte [DAU 1988].

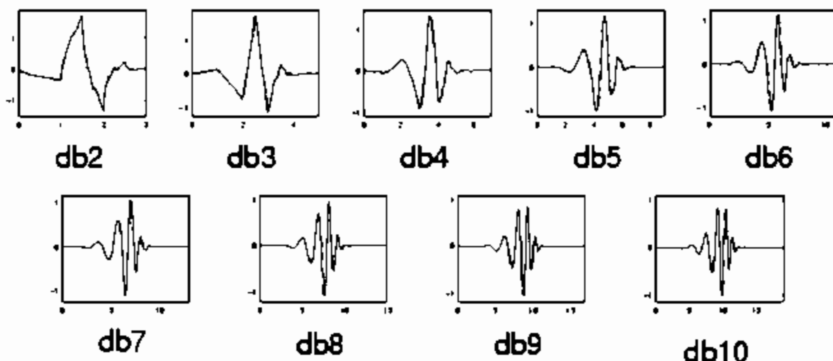


Figura 3.12 Wavelets dbN de Daubechies (*N*=2,3,4, ...): As Daublets [Fonte: Matlab®]. Interessante notar que a wavelet-mãe db2 exibe um formato característico de "*barbatana de tubarão*".

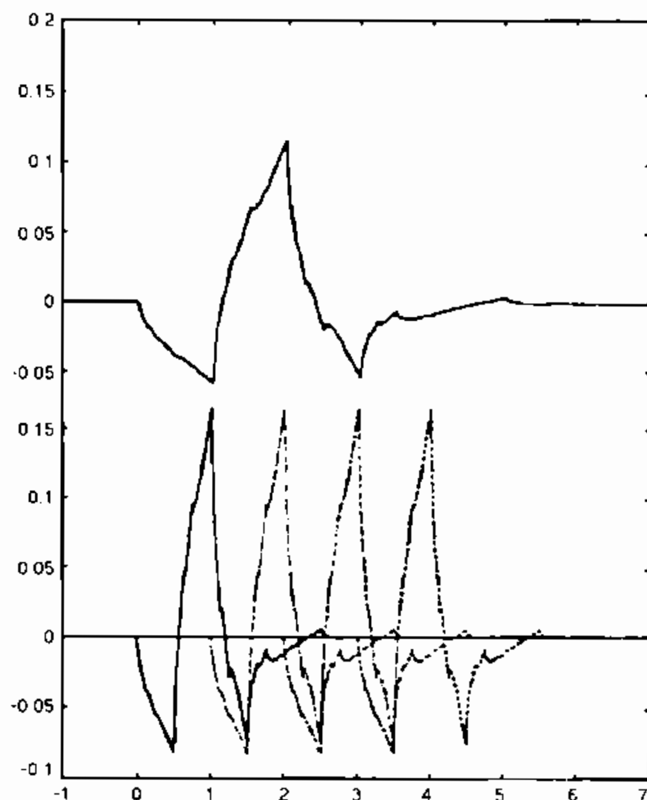


Figura 3.13 versões de uma db2. Estas formas de onda são ortogonais !

Estas wavelets (em particular a "barbatana de tubarão") apresentam comportamento fractal [MAN 1995].

❽ Wavelet Symmlets e Wavelet Coiflets

Coiflets e Symmlets são wavelets mais simétricas as quais foram projetadas para garantir momentos nulos, tanto na função de escala $\phi(t)$ quanto na wavelet-mãe $\psi(t)$. Elas foram criadas **I. Daubechies** sob demanda de **R. Coifman** em 1989. São também wavelets de suporte compacto.

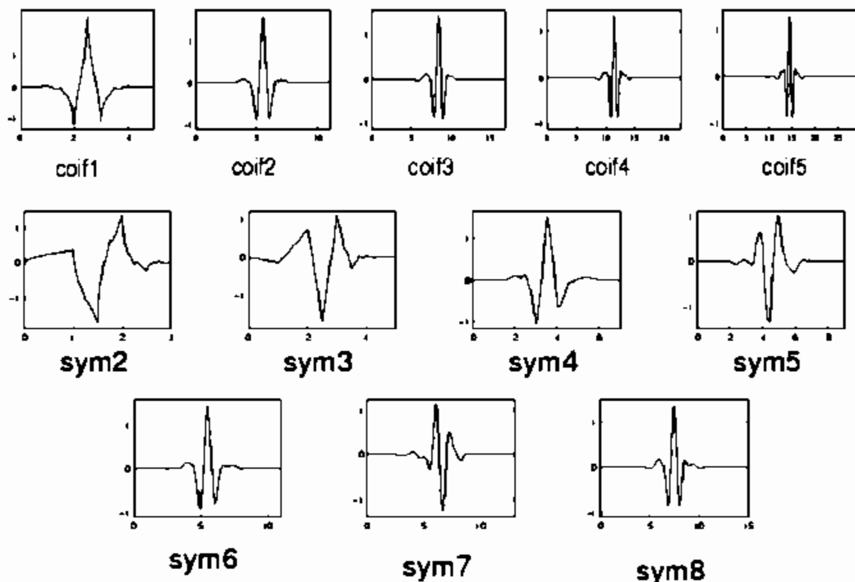


Figura 3.14 Coiflets e Symmlets (coif*n* e sym*n*); *n* é número de momentos nulos.

❾ Wavelet de "*de Oliveira*"

Esta seção apresenta uma família de wavelets ortogonais complexas [deO *et al.* 2002b, 2003b] a qual é baseada no critério clássico de **Nyquist** para eliminação de Interferência Intersimbólica em Sistemas de Comunicação Digital. Mostra-se que estas wavelets possuem um espectro típico passa-faixa ideal (plano), com regiões de "rolamento" assimétricas, porém mantendo a filosofia básica da análise a *Q*-constante.

A função de escala para uma wavelet de Shannon é expressa pela função amostral: $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{sinc}(t)$.

Uma forma de realizar uma AMR ortogonal (vide seção 3.3) via característica do cosseno elevado [SHANM 1985] é relembrando a condição central [MEY 1990]:

$$\sum_n |\Phi(w+2\pi n)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Basta escolher $\Phi(w) = \sqrt{P(w)}$ (raiz de cosseno elevado).

$$\Phi(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & 0\le |w|<(1-\alpha)\pi\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\dfrac{1}{4\alpha}\left(|w|-(1-\alpha)\pi\right) & (1-\alpha)\pi\le |w|<(1+\alpha)\pi\\[2mm] 0 & |w|>(1+\alpha)\pi\end{cases}.$$

Note que $\sum_n |\Phi(w+2\pi n)|^2=\frac{1}{2\pi}$, logo a raiz de cosseno elevado permite construir uma AMR ortogonal. A característica da função $\phi(t)$ no domínio freqüencial é mostrada na figura que se segue. É claro que tanto as funções de escala quanto as wavelets derivadas deste processo não são de suporte compacto.

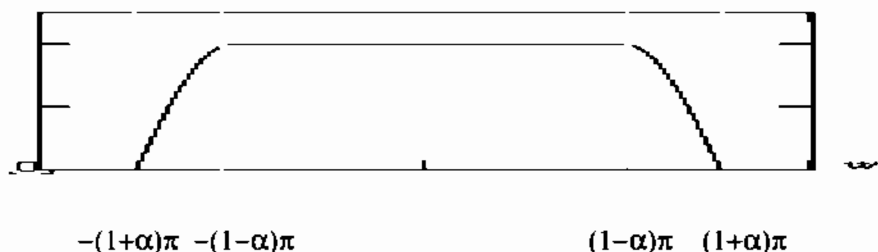


Figura 3.15 Característica freqüencial da AMR ortogonal "*de Oliveira*" .

A função pulso cossenoidal *PCOS* desempenha um papel importante na AMR cosseno elevado.

Definição. A função pulso cossenoidal de parâmetros t_0, θ_0,w_0 e B é definida por

$$PCOS(w;t_0,\theta_0,w_0,B):=\cos(wt_0+\theta_0)\prod\left(\frac{w-w_0}{2B}\right), \qquad t_0,\theta_0,w_0,B\in\mathbf{R},$$

$0<B<w_0$. ■

Ela corresponde a um pulso cossenoidal (no domínio espectral), com freqüência t_0 e fase θ_0, com duração de $2B$ rad/s, centrado na freqüência w_0. Alguns casos particulares simples contemplam:

1) A função porta: $\prod\left(\frac{w}{2B}\right)=PCOS(w;0,0,0,B)$

2) Uma porta deslocada para w_0 $\prod\left(\frac{w-w_0}{2B}\right)=PCOS(w;0,0,w_0,B)$

3) Um pulso cossenoidal perpétuo:

$$\cos(wt_0+\theta_0)=PCOS(w;t_0,\theta_0,0,B\to+\infty)$$

Denotando a transformada inversa por $pcos(t;t_0,\theta_0,w_0,B):=\Im^{-1}PCOS(w;t_0,\theta_0,w_0,B)$, tem-se o seguinte resultado:

Proposição. Fixados os parâmetros t_0, θ_0,w_0 e B de um *PCOS*, o espectro inverso *pcos* vale:

$$pcos(t;t_0,\theta_0,w_0,B)=\frac{B}{2\pi}\left\{e^{j(w_0t+w_0t_0+\theta_0)}.Sa[B(t+t_0)]+e^{j(w_0t-w_0t_0-\theta_0)}.Sa[B(t-t_0)]\right\}.$$

■

O sinal *pcos*(.) na maioria dos casos é um sinal complexo, quando não há simetria par ou ímpar em *PCOS*(.). Separando as partes real e imaginária, denota-se

$pcos(t;t_0,\theta_0,w_0,B)=rpc(t)+j.ipc(t)$ em que

$$rpc(t):=\Re e(pcos(t;t_0,\theta_0,w_0,B))\text{ e}$$
$$ipc(t):=\Im m(pcos(t;t_0,\theta_0,w_0,B)).$$

Vale notar as simetrias $rpc(-t)=rpc(t)$ e $ipc(-t)=-ipc(-t)$. Para determinar a função de escala, basta avaliar a transformada inversa de Fourier de $\Phi(w)$. Após uma tediosa manipulação, avaliando-se a transformada inversa dos termos, chega-se a:

$$\phi^{(deO)}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(1-\alpha).Sa[(1-\alpha)\pi t]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{4\alpha}{\pi}.\frac{1}{1-(4\alpha t)^2}\{\cos\pi(1+\alpha)t+4\alpha t.\text{sen}\,\pi(1-\alpha)t\}.$$

Um esboço da função de escala da AMR de "*de Oliveira*" é mostrado na figura a seguir, considerando diferentes fatores de rolamento.

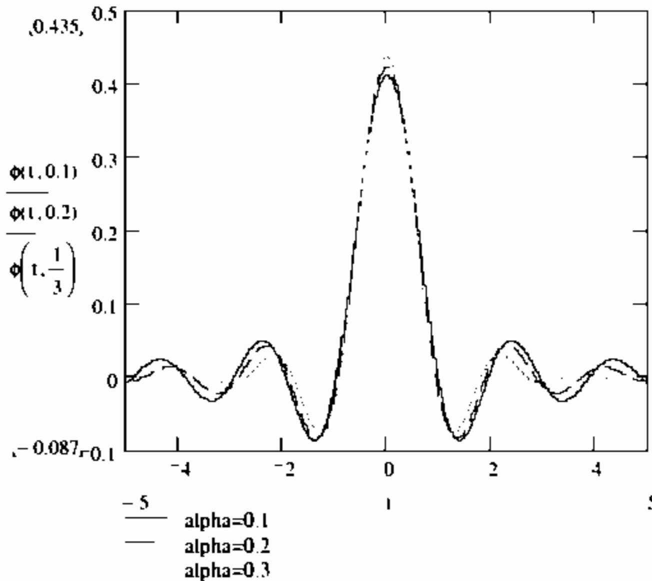


Figura 3.16 Função escala de *de Oliveira* (esboço com α=0,1, 0,2 e 0,3).

A função de escala $\phi^{(deO)}(t)$ pode ser expressa de um modo mais elegante e compacto com o auxílio das seguintes funções especiais:

Definição. (funções especiais); ν é um número real, $0 \le \nu \le 1$

$H_\nu(t) := \nu.\text{sinc}(\nu t)$,

$$M_{\nu_2}^{\nu_1}(t) := \frac{1}{\pi}\frac{2|\nu_1-\nu_2|}{1-[2t(\nu_1-\nu_2)]^2}\{\cos\pi\nu_1 t + 2(\nu_1-\nu_2)t.\text{sen}\pi\nu_2 t\}. \blacksquare$$

Tem-se então:

$\sqrt{2\pi}\phi^{(Sha)}(t) = H_1(t)$, e $\sqrt{2\pi}\phi^{(deO)}(t) = H_{1-\alpha}(t) + M_{1-\alpha}^{1+\alpha}(t)$.

Observa-se claramente que $\lim_{\alpha\to 0}\phi^{(deO)}(t) = \phi^{(Sha)}(t)$, como esperado.

Mostra-se que a wavelet complexa de "*de Oliveira*" é dada por $\Psi^{(deO)}(w) = e^{-jw/2}S^{(deO)}(w)$, cujo módulo $|\Psi^{(deO)}(w)| = S^{(deO)}(w)$ é mostrado:

$$S^{(deO)}(w)=\begin{cases}0 & \text{se } w<\pi(1-\alpha)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{1}{4\alpha}\left(w-\pi(1+\alpha)\right) & \text{se } \pi(1-\alpha)<w<\pi(1+\alpha)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{se } \pi(1+\alpha)<w<2\pi(1-\alpha)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{1}{8\alpha}\left(w-2\pi(1-\alpha)\right) & \text{se } 2\pi(1-\alpha)<w<2\pi(1+\alpha)\\ 0 & \text{se } w>2\pi(1+\alpha)\end{cases}$$

Observe ainda que $\alpha\to 0$ implica na wavelet complexa de Shannon.

Note claramente o comportamento do tipo "passa-faixa" da wavelet $\Psi^{(deO)}(w)$. O *roll-off* à esquerda e a direita *não são* exatamente simétricos. De fato, embora os formatos sejam semelhantes, eles ocorrem em escalas diferentes, um comportamento típico de wavelets. Um esboço das wavelets de "de Oliveira" é mostrado a seguir [vide http://en.wikipedia.org/De_Oliveira].

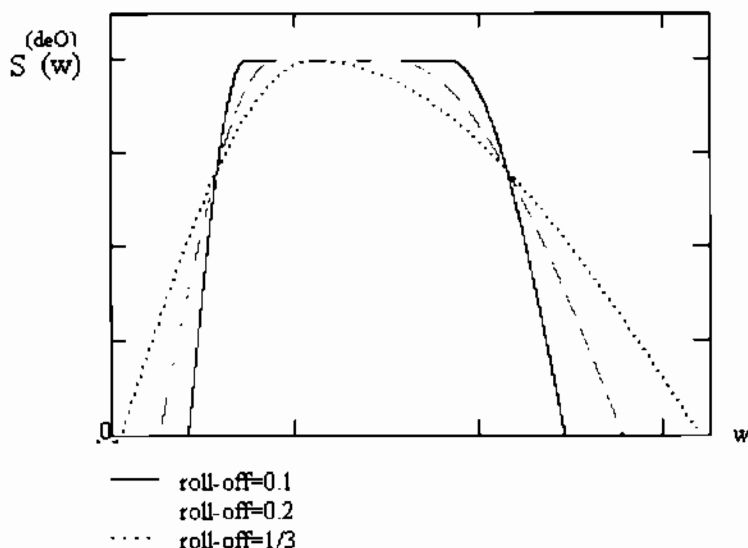


Figura 3.17 Módulo da Wavelet de "*de Oliveira*" (domínio da f).

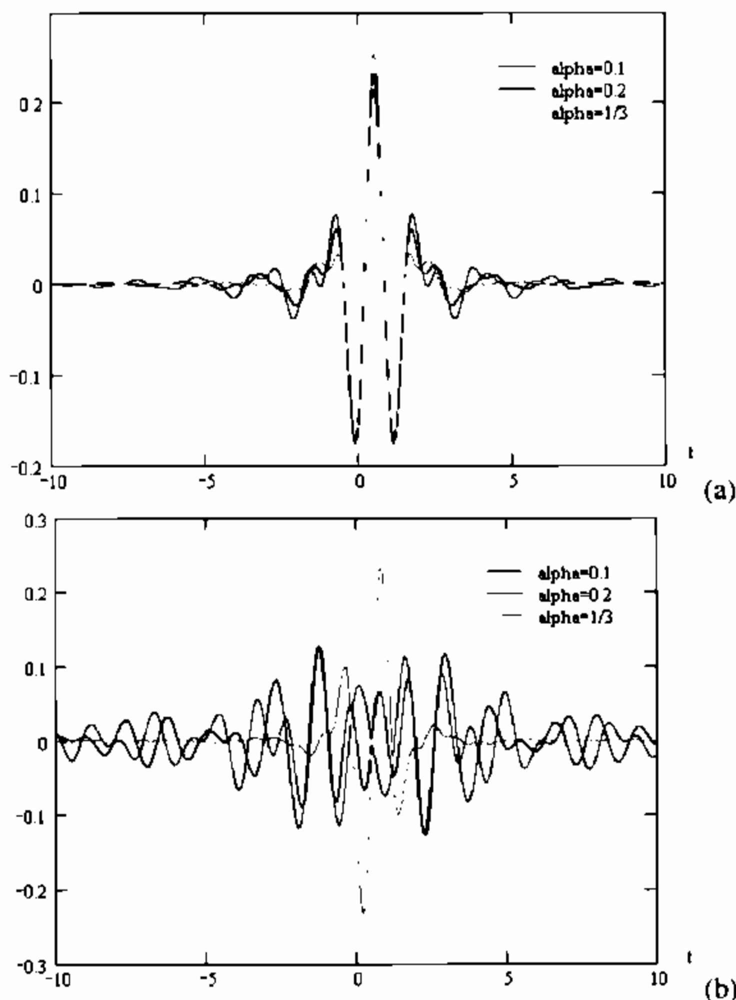


Figura 3.18 Wavelet $\psi^{(deO)}(t)$: (a) Parte real e (b) parte imaginária.

Wavelets com ritmo: as wavelets de Malvar

Um sinal de variações não estacionárias deve ser examinado em janelas de tempo curto, tal como acontece na transformada janelada de Fourier ou em wavelets. O sinal, cuja dinâmica é reveladora, pode ser segmentado de um modo não uniforme no tempo. Esta técnica constitui o princípio de Malvar (**Henrique Malvar**, UnB). **Y. Meyer** redescobriu e

generalizou-a através de wavelets com envelope que começa por um "ataque", segue em forma de "platô" e termina num "decrescendo" e cunhou o termo wavelets de Malvar. Este modelo, natural ao mundo físico, permite uma segmentação adaptativa no tempo – modelo muito freqüente em música. Trata-se de uma decomposição tempo-freqüência-escala, como uma transformada de Fourier janelada adaptativa [MALV 1988]. Algumas *applets* sobre o tema são indicadas:

- http://www-dsp.rice.edu/software/EDU/mra.shtml
- http://www-dsp.rice.edu/software/EDU/compression.shtml
- http://www-dsp.rice.edu/software/EDU/engine.shtml
- http://cm.bell-labs.com/cm/ms/who/wim/cascade/index.html
- http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/95-dpi/waveform/fourier.html

Outras wavelets com simetrias particulares incluem as wavelets harmônicas esféricas [LIRA *et al*. 2003a] e wavelets elíptico-cilíndricas [LIRA *et al*. 2004].

3.3 A ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO DE MALLAT

Um dos métodos de construção de wavelets ortogonais, desenvolvido por Mallat e Meyer, é a análise de multirresolução. Este método permite construir a maioria das wavelets ortogonais. A função de escala (LPF), denotada aqui por $\phi(t)$, foi introduzida por **Stéphane Mallat** em 1989 [MALL 1989], [MALL 2000]. O princípio fundamental é analisar o sinal através de uma combinação de uma função de escala $\phi(t)$ (passa-baixa) e wavelets $\psi(t)$ (passa-faixa). Esta idéia é essencial na codificação em sub-bandas e na análise multirresolucional. Os detalhes serão apresentados a seguir.

$clos\bigcup_m A_m$ denota a união dos conjuntos A_m, incluindo todos os pontos limites em $L^2(\boldsymbol{R})$.

($\forall m \in \boldsymbol{Z}$), cria-se um subespaço fechado $V_m \subset L^2(\boldsymbol{R})$ formado por sinais aproximados na escala 2^m. Formalmente:

<u>Definição (AMR).</u>
Uma análise de multirresolução em $L^2(\boldsymbol{R})$ consiste numa seqüência de subespaços fechados $V_m \subset L^2(\boldsymbol{R})$, $m \in \boldsymbol{Z}$, satisfazendo as seguintes relações:
(AMR1) $V_m \subset V_{m-1}$ ($\forall m$).
(AMR2) $f(t) \in V_m \subset L^2(\boldsymbol{R}) \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m-1}$.
(AMR3) $clos \bigcup_{m \in Z} V_m = L^2(\boldsymbol{R})$.
(AMR4) $\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\}$.
(AMR5) $\exists\ \phi(t) \in V_0$ tal que $\{\phi(t-n)\}_{n \in Z}$ é uma base ortonormal para V_0. ■
Alguns comentários diretos:

AMR1/AMR2 - A medida que m decresce, refinando a escala, a resolução em freqüência aumenta. Assim, detalhes que aparecem em uma escala 2^m devem também estar presentes na escala 2^{m-1}, i.e. $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots$

AMR3 - O espaço $L^2(\boldsymbol{R})$ contém todas as possíveis escalas e é de fato composto por todas as escalas possíveis, daí o nome (análise de multirresolução completa e ortogonal).

AMR4 - A função toda nula (i.e., nula em quase toda parte) é o único sinal de $L^2(\boldsymbol{R})$ que pode ser representado em qualquer escala V_m. Pode ser demonstrado [DAU 1992] que AMR4 é uma conseqüência das demais condições e poderia até ser suprimida.

AMR5 - Mostra-se que é $\{2^{-m/2}\phi(2^{-m}t-n)\}_{n \in Z}$ uma base de V_m. Com efeito, isto segue da propriedade 2.

Na figura a seguir, mostra-se uma AMR de Haar. Note as aproximações do sinal analisado nas diferentes escalas, $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$

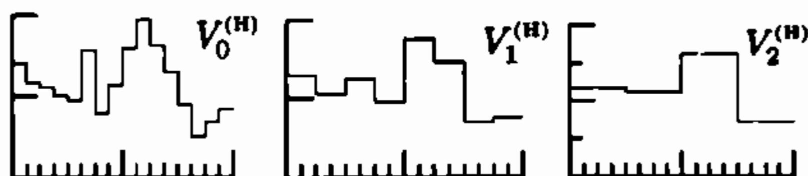


Figura 3.19 Análise de multirresolução de Haar (exemplo ilustrativo). Coluna esquerda: Função decomposta nos espaços de escala $V_0 \supset V_1 \supset V_2$.

Equação Básica de Dilatação (Equação de refinamento)

Considerando como espaço de referência $V_0 \subset V_{-1}$, qualquer sinal nele contido pode ser decomposto em termos das funções de uma base de V_{-1}. Em particular, isto deve ser válido para a função de escala $\phi(t) \in V_0$.

Subespaço	Base
V_0	$\{\phi(t-n)\}_{n\in Z}$
V_{-1}	$\{\sqrt{2}\phi(2t-n)\}_{n\in Z}$.

Assim, existe uma seqüência $\{h_n\}$ tal que

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n \phi(2t-n) \text{ com } \sum_{n\in Z} |h_n|^2 < +\infty .$$

Esta é a principal equação da AMR. Ela tem solução única, de forma que os coeficientes $\{h_n\}$ podem ser usados para determinar univocamente a função de escala $\phi(t)$. Os coeficientes $\{h_n\}$ são chamados de "coeficientes do filtro passa-baixa", ou "coeficientes do filtro de escala".

A AMR também define subespaços $W_m \subset L^2(\mathbb{R})$ chamados de espaços wavelets, formados pelos detalhes do sinal na escala V_m, i.e., definidos como o complemento ortogonal de V_m relativamente ao próximo espaço de escalas $V_{m-1} \supset V_m$. Assim, por definição, $V_{m-1} = V_m \dot{+} W_m$.

A operação $\dot{+}$ enfatiza o fato que $V_m \perp W_m$. É comum também o uso de outras notações, como $\oplus$ para enfatizar a "soma ortogonal". Note que $W_m \subset V_{m-1}$ e em particular, $W_0 \subset V_{-1}$. Deste modo, W_m contém os "detalhes" necessários para ir de V_m para V_{m-1}. Daí porque os subespaços W_m serem também chamados de subespaços de detalhes.

Ao contrário dos subespaços de escala V_m que são aninhados, $V_m \cap V_{m'} = V_{MAX\{m,m'\}}$, os subespaços wavelets são essencialmente disjuntos, i.e., $W_m \cap W_{m'} = \{0\}$ $m \neq m'$.

Se existe um sinal (wavelet-mãe) $\psi(t) \in W_0$ tal que o conjunto $\{\psi(t-n)\}_{n\in Z}$ é uma base ortonormal de W_0, então se pode mostrar que, $(\forall m)$, $\{2^{-m/2}\psi(2^{-m}t-n)\}_{n\in Z}$ é uma base ortonormal para W_m. Se esta propriedade é satisfeita, então:

①-Multirresolução para os espaços W_m

$$f(t) \in W_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in W_0$$

②-Invariância ao deslocamento

$$(\forall n \in \mathbf{Z})\ f(t) \in W_m \Leftrightarrow f(t-n) \in W_m$$

③-Ortogonalidade entre os espaços wavelets

$$W_m \perp W_{m'}\ m \neq m'.$$

④-Todo o espaço $L^2(\mathbf{R})$ pode ser obtido unicamente numa soma de subespaços ortogonais:

$$L^2(\mathbf{R}) = clos \dot{\bigcup_{m\in Z}} W_m. \quad \blacksquare$$

Desde que $V_{m-1} = V_m \dot{+} W_m$, segue-se que $W_0 \subset V_{-1}$. Considerando W_0 o subespaço de referência, qualquer sinal nele contido pode ser decomposto em termos dos sinais de uma base de V_{-1}. Em particular, isto é válido para a função wavelet-mãe $\psi(t) \in W_0$.

Subespaço	Base
W_0	$\{\psi(t-n)\}_{n\in Z}$
V_{-1}	$\{\sqrt{2}\phi(2t-n)\}_{n\in Z}$.

Assim, existe uma seqüência $\{g_n\}$ tal que

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} g_n \phi(2t-n) \text{ com } \sum_{n\in Z} |g_n|^2 < +\infty.$$

As duas equações centrais da AMR são, portanto, (**Equações de escala dupla**):

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n \phi(2t-n) \text{ e } \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} g_n \phi(2t-n). \quad \blacksquare$$

Uma abordagem inovadora para a análise de wavelets consiste em considerá-la como uma técnica de processamento de informação [deO 2004], [deO&SOU 2006].

Algoritmo cascata.

Aproximações numéricas para uma função de escala $\varphi(t)$ e para a função wavelet $\psi(t)$ correspondente, podem ser construídas com base nos coeficientes h e g, com auxílio das equações básicas de dilatação em dupla escala. A idéia é calcular $\varphi^{(k)}(t)$ como a iteração de ordem k, determinada a partir de uma versão anterior da iteração de acordo com [MALL 2000]:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]\sqrt{2}\varphi^{(k)}(2t-n) \text{ e}$$

$$\psi^{(k+1)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n]\sqrt{2}\varphi^{(k)}(2t-n).$$

Se o algoritmo converge para um ponto fixo, esta é a solução da equação de dupla escala, a qual é independente da solução inicial arbitrada $\varphi^{(0)}(t)$ (ou $\psi^{(0)}(t)$).

Wavelet Discreta

A transformada de wavelet contínua é calculada fazendo translações e escalonamentos contínuos de uma função sobre um sinal. Na prática, esta transformada não seria muito versátil, pois iria requerer a realização de infinitas translações e escalonamentos, demandando muito tempo e recursos computacionais, ainda assim, gerando muita redundância. As wavelets discretas foram introduzidas para superar este obstáculo. Elas não são transladadas nem escalonadas continuamente, mas sim em intervalos discretos. Isto pode ser feito com uma pequena modificação na wavelet contínua.

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s_0{}^j|}}\psi\left(\frac{t-k\tau_o s_0{}^j}{s_0{}^j}\right),$$

em que j e k são inteiros; $s_0>1$ é um parâmetro de dilatação fixo; τ_0 é o fator de translação o qual depende do fator de dilatação.

Geralmente escolhe-se $s_0 = 2$ para que se tenha uma amostragem da freqüência chamada de amostragem diádica e $\tau_0 = 1$ é escolhido para que a amostragem temporal também seja diádica. Isto resulta em:

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j}\,\psi(2^j t - k).$$

Quando se usam wavelets discretas para analisar um sinal, o resultado é uma série de coeficientes wavelet, também chamada de Série de decomposição de wavelet [deO 2007].

Ao amostrar o sinal em intervalos discretos no eixo temporal e freqüencial, diminuí-se boa parte da redundância, porém pode-se ter ainda *infinitas* translações e escalonamentos discretos. A partir deste momento, surge a pergunta: É possível truncar a análise via wavelet em certo ponto e ainda obter um resultado confiável?

As translações são limitadas à duração do sinal, logo existe um limite superior. Resta então analisar o escalonamento. Quantas escalas serão necessárias para se analisar um sinal? Este problema pode ser analisado relembrando a propriedade de escalonamento da análise de Fourier.

Uma compressão, no tempo, da wavelet, irá proporcionar uma expansão do espectro da wavelet e uma translação dos componentes de freqüência da mesma. Para se analisar o espectro como um todo (até a origem), seria necessário ter infinitas wavelets escalonadas, já que cada expansão no tempo comprime proporcionalmente a sua largura de banda. Isto significa que, por mais escalonamentos que se faça no domínio temporal, cobre-se apenas parte do espectro restante e nunca se chegará à origem [GRA 1999].

A solução para este obstáculo é simplesmente não cobrir o espectro até a origem. Com este valor calcula-se o limite inferior para o escalonamento, único parâmetro restante.

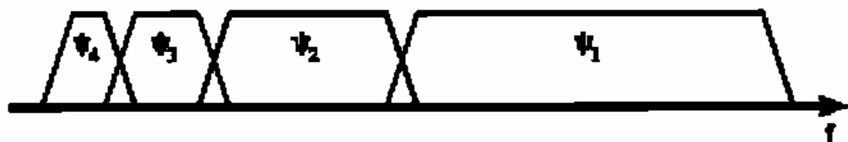


Figura 3.20 Compressão no tempo gera uma expansão do espectro da wavelet e uma translação de seus componentes de freqüência.

Como uma wavelet pode ser vista como um filtro passa-faixa, a série de wavelets dilatadas pode ser vista como um banco de filtros passa-faixa. Uma curiosidade aparece quando se toma a razão entre a freqüência central do espectro de cada wavelet deslocada e o comprimento total de seus respectivos espectros. A razão é constante para todos os deslocamentos! Esta razão é conhecida como o fator de fidelidade-Q do banco de filtros. Na prática tem-se uma wavelet discretizada, com limites superiores e inferiores para as translações e os escalonamentos, faltando apenas o cálculo de sua Transformada de Wavelet Discreta (*DWT*).

A idéia de se passar um sinal por um banco de filtros é conhecida como codificação em sub-bandas (*Subband Coding*). Este princípio será usado no cálculo da Transformada de Wavelet Discreta. O banco de filtros usado na codificação sub-banda pode ser projetado de diversas maneiras. O modo usado na análise para wavelets discreta consiste em projetar filtros passa-alta (HPF) e passa-baixa (LPF) de tal modo que "quebre" o espectro exatamente ao meio. Os componentes, resultantes da filtragem passa-alta, contém as altas freqüências, que já nos fornecem as informações com os mínimos detalhes. Precisa-se então analisar com mais cuidado os componentes resultantes do filtro LPF, pois eles fornecem apenas uma visão global destas freqüências. Passa-se novamente este trecho do espectro por outro par de filtros: um LPF e um HPF. Da mesma maneira supracitada, a parte do HPF fornece detalhes. Divide-se novamente a porção LPF, até considerar satisfatório o número de bandas criadas.

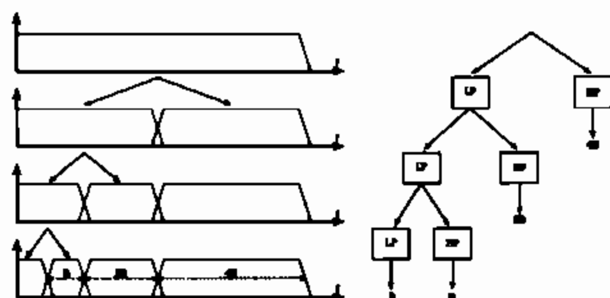


Figura 3.21 Banco de filtros / Codificação em Sub-bandas. Representação espectral e banco de filtros LP / HP.

Uma wavelet discreta não é discreta no tempo, mas sim nas translações e escalonamentos. O sinal, ao passar por um banco de filtros digitais, resulta na DWT. O procedimento inicia-se com a passagem do sinal através de um filtro passa-baixa digital de meia banda com resposta

ao impulso $h[n]$, em que n é um número inteiro. A operação de convolução em tempo discreto é realizada da seguinte forma:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k}x[n]h[n-k].$$

Após o sinal passar pelo filtro passa-baixa de meia banda, metade das amostras é eliminada, já que a freqüência máxima vale agora metade de seu antigo valor. O sinal fica sub-amostrado por dois. A escala do sinal fica então multiplicada por dois. Nota-se que o LPF remove a informação de alta freqüência do sinal, porém mantém sua escala inalterada. A escala é alterada apenas pelo processo de *sub-amostragem*. A resolução por outro lado é afetada pela filtragem, pois metade das freqüências do sinal é eliminada. A DWT emprega dois tipos de funções, chamadas de funções "escala" e funções "wavelet", que estão, por sua vez, associadas com os LPFs e HPFs, respectivamente. A decomposição do sinal em bandas de freqüências diferentes é simplesmente obtida pela filtragem sucessiva do sinal.

Propriedade. Os coeficientes de escala e coeficientes de detalhes podem ser calculados a partir de um sistema wavelet ortogonal através das relações [MALL 2000]:

$$h[n]=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\varphi(2t-n)dt,\ g[n]=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\varphi(2t-n)dt.$$

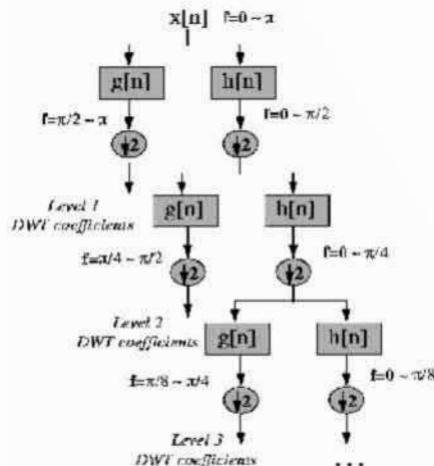


Figura 3.22 Cálculo dos coeficientes da Transformada Discreta de Wavelet usando filtragem e *sub-amostragem*. Os valores de $g[n]$ correspondem ao HPF e os valores de $h[n]$ correspondem ao LPF.

Parametrização de Pollen

Todas as famílias de wavelets de suporte compacto com um dado comprimento do vetor de coeficientes de escala podem ser geradas a partir de uma expressão geral: a parametrização de **Pollen**-Wells [WELLS 1993]. Por exemplo, todas as wavelets de suporte compacto com N=4 são descritas via um único parâmetro angular α, como segue:

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2} \text{ e } h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \text{ e } h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 .$$

$$h_0 = \frac{1 - cas\alpha}{2\sqrt{2}},\ h_1 = \frac{1 + cas\alpha}{2\sqrt{2}},\ h_2 = \frac{1 + cas'\alpha}{2\sqrt{2}},\ h_3 = \frac{1 - cas'\alpha}{2\sqrt{2}}.$$

Note que wavelets de Haar correspondem a α=0, π/2, 3π/2 e a wavelet de Daubechies corresponde a α=π/3. Aqui, *cas*(.) e *cas*'(.) são casoidais (vide séries trigonométricas de Hartley).

3.4 ESPECTROGRAMAS, ESCALOGRAMAS

Uma outra ferramenta com aplicações na análise de sinais não-estacionários são os diagramas chamados de *espectrogramas*. No caso de sinais (estacionários) de energia, usa-se freqüentemente a **densidade espectral de energia** no plano *f*.

O escalograma proporciona informações sobre a distribuição de energia no plano $\tau \times f$. No caso Wavelet, o correspondente do espectrograma é chamado de escalograma (lembrando que o plano não é mais *freqüência* × *tempo* e sim *escala* × *deslocamento*).

Lembrando as relações de energia para as transformadas Fourier, Gabor e Wavelets, tem-se:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2\, df$$

$f(t) \leftrightarrow F(f)$ (relação de Parseval)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |STFT(f,\tau)|^2\, d\tau df$$

$f(t) \leftrightarrow F(\tau, f)$=STFT (tempo curto)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |CWT(\tau,a)|^2 \frac{d\tau da}{a^2}$$

$f(t) \leftrightarrow CWT(\tau,a)$ (transformada isométrica)

A densidade espectral de energia $G(f)$ vale: $G(f):=|F(f)|^2$ Joule/Hz.

O espectrograma é definido por: $spectrogram(\tau,f):=|STFT(\tau,f)|^2$ Joule.

Ele corresponde a uma densidade espectral de energia *variante no tempo*, para sinais não estacionários. A densidade espectral é obtida dentro de cada janela usada na transformada de Gabor. Trata-se de uma "versão dinâmica" de densidade espectral de energia.

Os valores são indicados no plano *tempo* × *freqüência* e poderiam ser traçados através de um gráfico de superfície (*surface plot, mesh*). A forma usual de representação para o espectrograma, no entanto, é planar: Usam-se diferentes cores para indicar a intensidade da densidade de energia (cada cor corresponde a uma curva de nível), variando do violeta ao vermelho do espectro visível. **Representação tipo espectrograma**: Os 'pixels' indicam a intensidade da densidade local de energia; na janela centrada no instante τ_0, na freqüência particular f indicada, a intensidade de $|STFT(f,\tau_0)^2|$ vale azul escuro numa escala de vermelho a violeta (arco-íris).

O escalograma é definido por: $scalegram(\tau,a):=|CWT(\tau,a)|^2$. Esta representação do sinal indica a sua distribuição local de energia no plano de decomposição *escala* versus *deslocamento* i.e., $(a \times b)$.

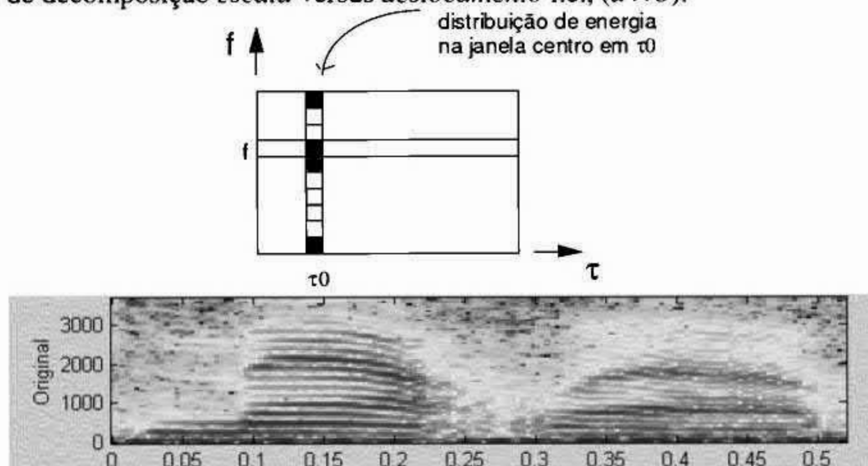


Figura 3.23 (a) Princípio do Espectrograma; (b) espectrograma de trecho de voz (fonte MATLAB™).

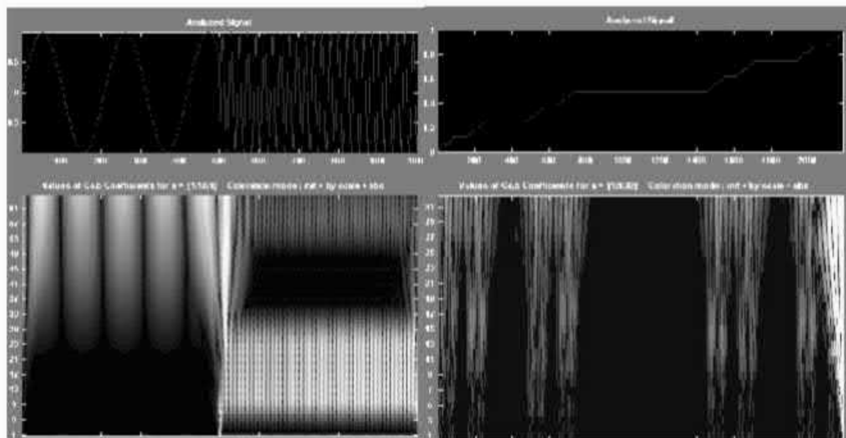


Figura 3.24 Escalograma (a) sinal com quebra de freqüência, escalograma com a wavelet symlet4; (b) Curva de Cantor, análise com wavelet.

A fim de ilustrar a distribuição de energia de um sinal não estacionário, apresenta-se um escalograma obtido através do *aplicativo* MATLAB™, na *toolbox* Wavelets e Processamento de sinais [KAM&HEC 1997].

3.5 UMA NOTA SOBRE A "ENGENHARIA" DA DESCONTAMINAÇÃO PARA RUÍDOS ADITIVOS OU DE COMO CEIFAR AS ERVAS DANINHAS POUPANDO AS MARGARIDAS[31]

A breve discussão que se segue elucida, sem maior rigor, porém de modo intuitivo, os alicerces da maioria das técnicas adotadas na descontaminação de sinais [DONO 1993], [DONO 1995]. Embora grosseira, a ilustração é suficiente para propósitos de compreensão do mecanismo. Admita que um sinal $f(t)$ de espectro $F(w)$ é contaminado por um ruído aditivo $n(t)$, de espectro $N(w)$. O sinal contaminado é expresso por $f(t)+n(t)$. Como a transformada de Fourier é linear, o espectro do sinal é superposto, de forma aditiva, ao espectro do ruído. Tem-se então $F(w)+N(w)$ como espectro contaminado. Os espectros envolvidos são apresentados para um caso hipotético e simples. Idealmente, as densidades espectrais de potência correspondentes seriam utilizadas (i.e., $|F(w)|^2$ e $|N(w)|^2$). A potência total do sinal é assumida como bem superior

[31] expressão cunhada por **V. Wickerhauser**.

àquela do ruído (integrais da magnitude ao quadrado do espectro). Há, porém, trechos da banda em que o sinal "domina" largamente o ruído, enquanto que há partes em que o ruído é praticamente de mesma ordem do sinal. A idéia central da descontaminação consiste em estabelecer um *limiar* sobre o espectro contaminado [TASW 2000]. Trechos do espectro abaixo do limiar são eliminados (assassinados). Nas zonas abaixo do limiar, pode haver algum sinal presente (provavelmente haverá), porém a intensidade do ruído é "comparável" ao sinal e a informação encontra-se comprometida – um espectro "sujo". O melhor a fazer nesses casos é apagar tais trechos do espectro, ainda que sob o preço de eliminar certa quantidade (normalmente desprezível) da energia/potência do sinal. Imagine que, em uma dada banda de freqüências B_1, a potência do ruído seja 1 W, comparável à potência de 2 W do sinal, dentro dessa mesma banda. Já numa outra região B_2 do espectro contaminado, a potência do ruído é da ordem de 1 W, porém o sinal é mais forte, integrando 50 W[32]. Trechos menos confiáveis do espectro contaminado (não representativos), como o trecho B_1, são suprimidos, mantendo *apenas* a informação em trechos em que ela é essencialmente compatível com o sinal. O mecanismo lembra de como tratar maçãs bichadas: para aproveitá-las, extirparem-se as partes que se encontram podres. A eliminação de trechos substancialmente ruidosos do sinal fornece um "espectro descontaminado", o qual é então usado para obter uma versão "mais limpa" do sinal, via a transformada inversa. *Isso pode ser realizado em qualquer domínio de transformação, desde que o ruído seja aditivo e a transformada seja linear*. Particularmente essa estratégia tem se mostrado extremamente eficiente no caso da aplicação da transformada de wavelet. Qual a razão do sucesso das wavelets nesse problema, frente a outras transformadas? As transformadas de wavelet permitem um maior grau de liberdade na decomposição (quando comparada a Fourier, Hadamard, DCT etc.), o que permite obter decomposições com concentração de energia em um número menor de coeficientes da transformada (propriedade algo como usualmente citado na DCT para justificar o seu sucesso), daí a eficiência do processo *denoising*. Essa também é, *grosso modo*, a base filosófica do êxito da compressão *waveshrink* [BRA&BRI 1994], [COI&WIK 1995], [SKO *et al.* 2001], [CHRIS *et al.* 2000], [LIRA *et al.* 2003b].

---

[32] É claro que não se pode avaliar tais potências quando não se dispõe do ruído! Porém através do limiar, pode-se ter uma idéia das faixas espectrais significativas para o sinal.

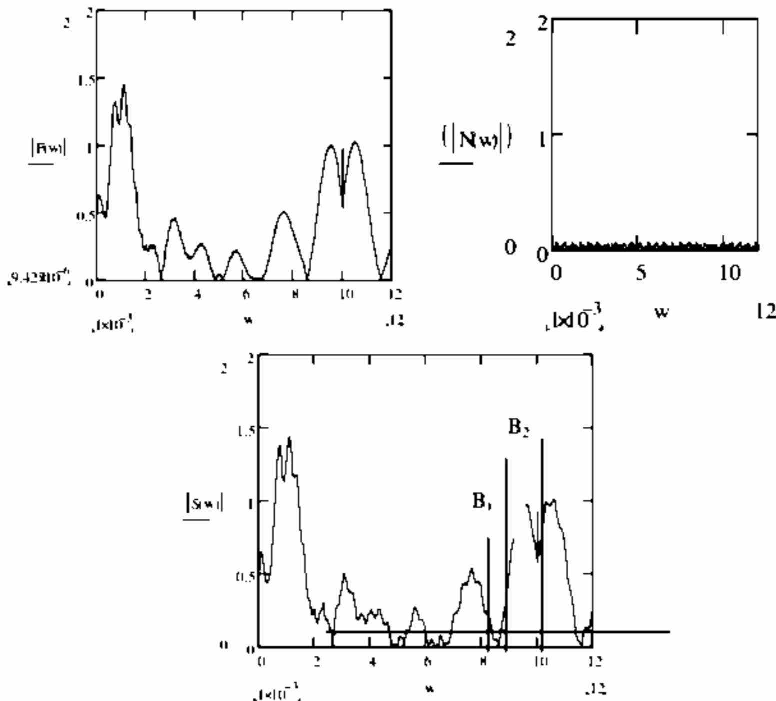


Figura 3.25 (a) Sinal original; (b) ruído aditivo; e (c) sinal contaminado. O limiar é indicado, ilustrando que as zonas abaixo dele (e.g. B_1) encontram-se muito comprometidas e devem ser suprimidas. Já nas demais regiões (e.g. B_2), o sinal é menos afetado, em termos relativos, pelo ruído.

3.6 TEORIA DA AMOSTRAGEM (NYQUIST-SHANNON-KOTEL'NIKOV)

Na conversão analógico-digital (conversão A-D) é necessário colher-se um número discreto de amostras de um sinal contínuo. O problema crucial na amostragem está relacionado com o número de amostras/segundo que devem ser colhidas. É óbvio que um número muito pequeno de amostras pode resultar em uma representação demasiadamente pobre para o sinal. A análise quantitativa acerca deste problema é estudada no **Teorema de Shannon-Nyquist**, um dos resultados fundamentais da Teoria de sinais; vide os excelentes tutoriais [JERRI 1977], [GAR 2000].

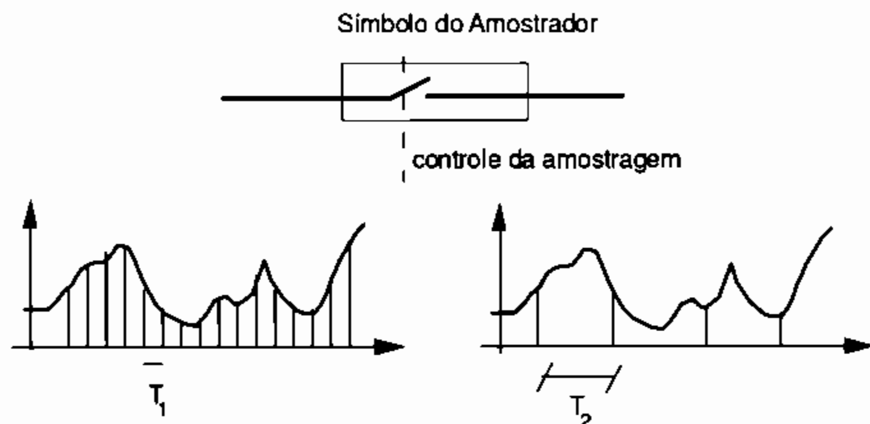


Figura 3.26 Sinal analógico amostrado em diferentes taxas (Teoria dos Conversores A/D).

A princípio, poder-se-ia imaginar (como parece indicar o "bom senso") no processo de amostragem de um sinal analógico haveria sempre uma perda de informação e que esta perda seria tanto menor quanto maior a taxa de amostragem (#amostras/s) utilizada. Entretanto, o Teorema de Shannon (**Claude Elwood Shannon**) mostra que isto nem sempre é verdade [NYQ 1924], [SHAN 1993].

Numa abordagem superficial, parece intuitivo que uma representação discreta (conjunto de índice nos Inteiros $\mathbb{Z}$) não poderia "armazenar" toda a informação de um sinal com variações no *continuum* (conjunto de índice nos Reais $\mathbb{R}$)[33]. A série de Fourier é um primeiro resultado na direção contrária: com um número infinito porém contável de coeficientes, representa-se a informação de um sinal definido no infinito incontável.

[33] A realidade, entretanto freqüentemente engana nossos sentidos, como o caso do mapeamento de Cantor (**Georg Cantor**) dos racionais $\mathbb{Q}$ nos Naturais $\mathbb{N}$.



Harry Nyquist (1889-1976)



Claude Shannon (1916-2001)

O teorema estabelece que, sob certas condições, as amostras colhidas de um sinal podem conter precisamente toda a informação a ele associada. Isto significa que o sinal pode ser *perfeitamente* recuperado a partir de amostras, *sem nenhuma aproximação*. É como se o conhecimento de pequenos trechos eqüiespaçados do sinal fossem suficientes para realizar uma interpolação "perfeita" de vazios entre os trechos!

Este resultado não é intuitivo: por muito tempo acreditou-se que a maneira mais natural seria imaginar há um comprometimento da parte da informação correspondente aos trechos entre amostras. O melhor que se poderia fazer nestes casos seria uma interpolação (exemplo, interpolação *linear* ou métodos de interpolação de cálculo numérico-- polinômios de Lagrange etc.) para "estimar" o que ocorreu nos espaços vazios.

TEOREMA DA AMOSTRAGEM I. (uniforme)

Mais uma vez, o estudo é aplicável apenas para sinais "banda limitada", i.e., aqueles que não possuem componentes espectrais para freqüências acima de uma dada freqüência f_m Hz, tal como mostra a ilustração da figura que segue. Embora esta condição não seja rigorosamente verificada, ela é bastante útil em termos de aplicações práticas [SLE 1976].

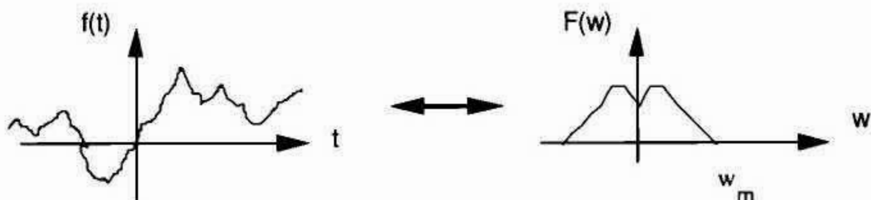


Figura 3.27 Representação de um sinal de banda limitada (domínios t e f).

TEOREMA (Shannon 1948): Um sinal banda limitada em f_m Hz está univocamente determinado pelas suas amostras discretas, se estas são colhidas em uma taxa de pelo menos $2f_m$ amostras eqüiespaçadas por segundo. ■

Prova.

Se as amostras são colhidas a cada T_s segundos, considera-se então um trem de impulsos (pente de Dirac) $\delta_{Ts}(t)$,

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s).$$

A "amostragem" (instantânea) de um sinal $f(t)$ em intervalos de T_s segundos é definida por[34]:

$$f_s(t) := f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - nT_s)\cdot$$

Então a função amostrada $f_s(t)$ contém apenas informações acerca das amostras $f(nT_s)$ n=0, ±1, ±2..., pois

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)\cdot$$

Os pares de transformada dos sinais envolvidos nesta operação são mostrados na figura a seguir. Sem perda de generalidade, considera-se um espectro sob a forma mostrada.

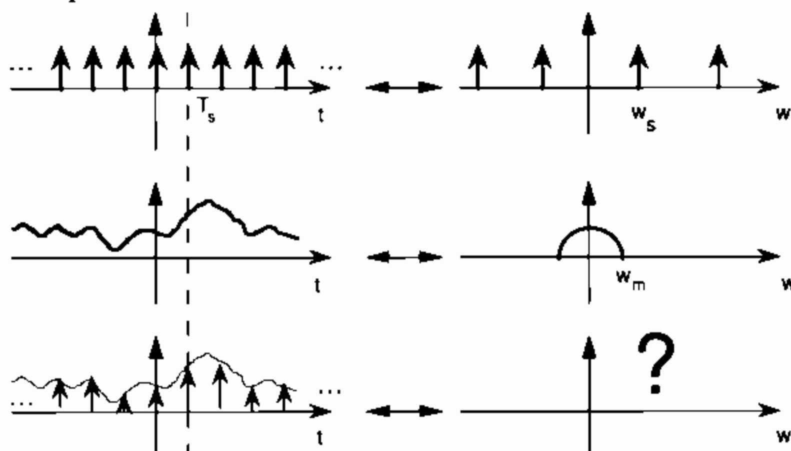


Figura 3.28 Sinais envolvidos no processo de amostragem (ideal). (a) pente de amostragem, (b) sinal analógico, (c) sinal com amostragem instantânea.

---

[34] Ver-se-á que toda informação de um sinal banda limitada f_m está contida nas amostras tomadas em intervalos uniformes menores que $1/2f_m$ seg !!

O espectro do sinal amostrado pode ser determinado com o auxílio do Teorema da convolução na freqüência:

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w).$$

Segue-se imediatamente que

$f(t)\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(w) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_s \delta(w - nw_s)$, ou seja, $f_s(t) \leftrightarrow F_s(w)$.

Logo, o espectro do sinal amostrado $f_s(t)$ é dado por:

$$F_s(w) = \frac{1}{2\pi} F(w) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_s \delta(w - nw_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w) * \delta(w - nw_s),$$

tendo sido utilizados a propriedade distributiva da convolução e o fato de que $w_s = 2\pi/T_s$.

Finalmente, obtém-se a relação $F_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w - nw_s)$.

Este espectro é esboçado para diversos valores de w_s (rd/s), i.e., vários valores para o espaçamento T_s entre amostras consecutivas.

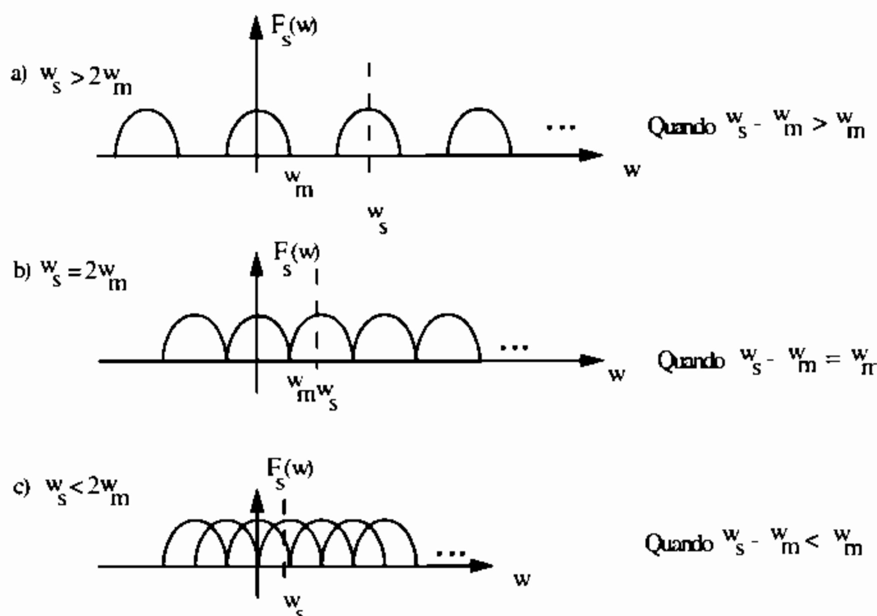


Figura 3.29 Espectros do sinal amostrado (diferentes taxas de amostragem).

Estes três casos mostram claramente que, a despeito do formato de $F(w)$, não há superposição entre os espectros constituintes nos casos em que $w_s \geq 2w_m$. Então, o uso de um LPF ideal permite que $f(t)$ seja recuperado sem distorções. Vê-se que a demonstração independe da forma do espectro do sinal a ser amostrado, mas somente do fato que o sinal é limitado em banda.

Supondo que o filtro passa-baixas tem função de transferência dada por $H(w) = T_s \prod\left(\frac{w}{2w_m}\right)$, então a recuperação do sinal a partir das amostras pode ser feita conforme a figura 3.30.



Vladimir Kotel'nikov (1908-). Artigo original em 1933.

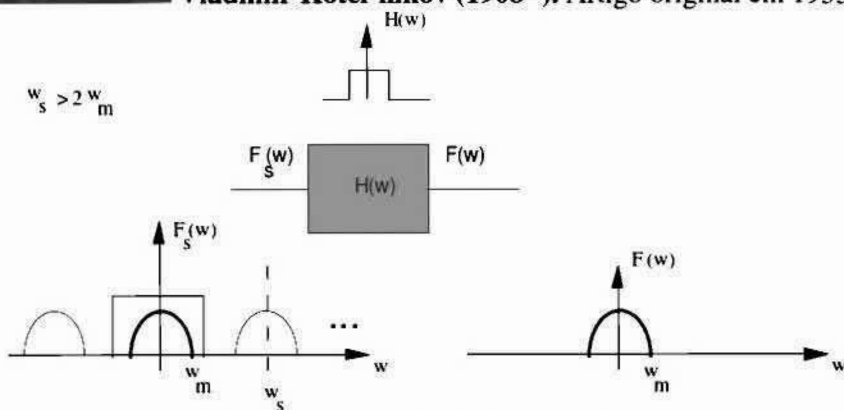


Figura 3.30 Recuperação do sinal a partir de amostras. Efeito da filtragem passa-baixa.

Para a recuperação exata, sem distorções, é necessário que $w_s \geq 2w_m$, ou seja, $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ segundos. ■

O limite $1/T_s = 2f_m$ amostras.s^{-1} é chamado de *taxa de Nyquist* [NYQ 1924]. Este é sem dúvida um resultado bastante surpreendente!

REOBTENÇÃO DO SINAL A PARTIR DE AMOSTRAS: Interpolação.

De acordo com o teorema de Shannon/Nyquist, se $1/T_s=2f_m$, então a passagem do sinal amostrado por um filtro passa-baixas ideal recupera exatamente o sinal analógico. Isto significa que:

$$F_s(w)T_s\prod\left(\frac{w}{2w_m}\right)=F(w)\cdot$$

A seguir, a análise do processo de re-obtenção do sinal é realizada no domínio temporal, conduzindo a uma interpretação rica, surpreendente e interessante. Seja

$$f(t)\leftrightarrow F(w)=F_s(w)T_s\prod\left(\frac{w}{2w_m}\right)\cdot$$

O uso do teorema da convolução no tempo indica que é possível escrever $f(t)$ sob a forma:

$$f(t)=\Im^{-1}[F_s(w)]*\Im^{-1}T_s\prod\left(\frac{w}{2w_m}\right)\cdot$$

A utilização dos seguintes pares de transformada:

$f_s(t)\leftrightarrow F_s(w)$ e $\frac{w_m}{\pi}Sa(w_m t)\leftrightarrow\prod\left(\frac{w}{2w_m}\right)$, conduz a uma expressão da forma da resposta impulsional-- $f(t)=f_s(t)*T_s\frac{w_m}{\pi}Sa(w_m t)$;

Logo,

$$f(t)=\frac{T_s w_m}{\pi}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*Sa(w_m t)$$

$$=\frac{T_s w_m}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}f(nT_s)\left[\delta(t-nT_s)*Sa(w_m t)\right]$$

Lembrando da "propriedade de amostragem" da distribuição de Dirac, segue-se imediatamente que

$$f(t)=2f_m T_s\sum_{-\infty}^{+\infty}f(nT_s)Sa\left[(w_m(t-nT_s)\right]\cdot$$

No caso particular em que $T_s=1/2f_m$, tem-se:

$$f(t)\approx\sum_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n}{2f_m}\right)Sa(w_m t-n\pi)\cdot$$

Como o sinal é recomposto através das amostras? Observa-se que $f(t)$ corresponde à superposição de vários pulsos "*samples*" deslocados, centrados nos instantes 0, $\pm T$, $\pm 2T$, ... etc., i.e., nos instantes de amostragem. É curioso ressaltar que a fórmula exibida representa um desenvolvimento (expansão) em série generalizada de Fourier (capítulo 1), na qual os coeficientes de Fourier generalizados c_n correspondem as amostras do sinal e o conjunto de sinais ortogonais usado é $\{\phi_n(t)\} = \{Sa(w_m t - n\pi)\}_{-\infty}^{+\infty}$.

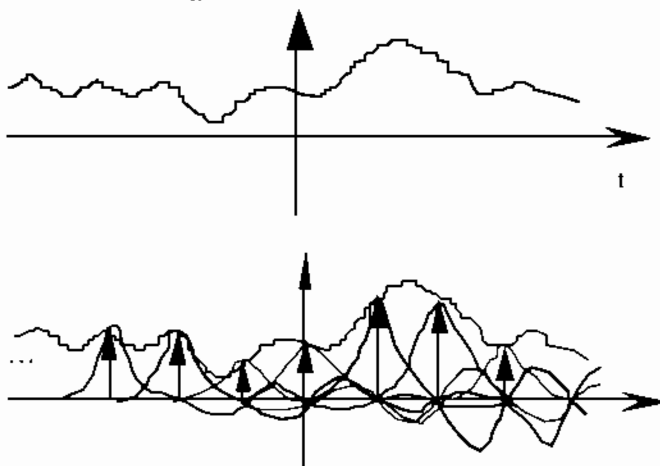


Figura 3.31 Interpolação das amostras por filtro passa-baixa.
(a) sinal original (b) processo de interpolação.

Considerações:

a) Nos pontos de amostragem nT_s, o valor correto de $f(t)$ é $f(nT_s)$. Em t=0, todas as funções "*sample*" se anulam, exceto aquela centrada na origem, cujo valor é $f(0)$.
b) Em $t=T_s$, apenas o pulso "*sample*" aí centrado é não nulo, e assim por diante.
c) Nos instantes diferentes de nTs, os pulsos amostrais "*samples*" somam desde $-\infty$ a $+\infty$ e reconstituem exatamente o valor de $f(t)$ no ponto analisado (interpolação perfeita).

<u>Proposição</u>. A energia de um sinal banda limitada em f_m Hz pode ser calculada em termos das amostras colhidas na taxa de Nyquist como

$$E = \frac{1}{2f_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^2\left(\frac{n}{2f_m}\right).$$

Prova [HMdO]. Tem-se que $f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{2f_m}) Sa(w_m t - n\pi)$. Calculando $f^2(t)$ e integrando-se na reta real, a prova segue da aplicação da relação de ortogonalidade $\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(w_m t - n\pi).Sa(w_m t - m\pi)dt = \frac{w_m}{\pi}\delta_{n,m}$. ■

O Teorema de Shannon-Nyquist-Kotel'nikov é válido para sinais cujo espectro é de suporte compacto (na freqüência). Como recíproca, a amostragem de sinais de suporte compacto (no tempo) resulta em uma versão do Teorema da amostragem no domínio da freqüência.

Teorema (DUAL DO TEOREMA DA AMOSTRAGEM):
Se $f(t)$ é um sinal real de energia finita, limitado no tempo, com $f(t) \leftrightarrow F(w)$, e suporte de comprimento T (i.e., $f(t)=0$, $|t| \geq T/2$), mostra-se então que

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n}{T}\right) Sa(wT + n\pi). \blacksquare$$

Outras variantes do teorema da amostragem podem ser deduzidas pelo método unificado [GAR 2000], incluindo versões envolvendo a transformada de Fourier cosseno, a transformada de Hartley, a transformada de Laguerre, por exemplo (**Edmond Laguerre**).

APPLETS SOBRE TEOREMA DA AMOSTRAGEM E LISSAJOURS

- http://www.gris.uni-tuebingen.de/projects/grdev/applets/fourier/EnglishApplet.html
- http://www.mathcats.com/explore/lissajous/lissajous.html

Exercício 14.
O sinal $f(t):=sinc(t)$ é banda limitada em π rd/seg. Aplicando o teorema da amostragem de S-N-K, demonstre a fórmula $\text{sinc}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(n).\text{sinc}(2t-n)$. Use esta relação para mostrar que $\varphi(t) := \text{sinc}(t)$ constitui uma função de escala para uma análise por wavelets: *A wavelet de Shannon* (vide relação de dupla escala). ■

DIMENSIONALIDADE DE SINAIS

Seja $f(t)$ um sinal real de energia finita, $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$, tempo-limitado em T seg, cujo conteúdo de energia fora da banda B (Hz) especificada é inferior a λE (λ é a fração da energia fora da banda considerada). Então:

1. $f(t)=0$, $|t|>T/2$
2. $\int_{-B}^{+B} |F(w)|^2\, df > (1-\lambda)E$.

TEOREMA 2BT [LAN&POLL 1961]. Existe um conjunto de sinais ortogonais $\{\phi_m(t)\}_{m=0}^{L-1}$, de cardinalidade finta L, tal que a energia do sinal de erro da aproximação da série truncada é inferior a $12\lambda E$, i.e.,

$f(t) \equiv \sum_{m=0}^{L-1} c_m \phi_m(t)$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) - \sum_{m=0}^{L-1} c_m \phi_m(t) \right|^2 dt < 12\lambda E$, em que $L = \lfloor 2BT+1 \rfloor$. ■

Conseqüência: o número de dimensões de um sinal $f(t)$ limitado no tempo em T (seg.) e com energia praticamente concentrada na banda B (Hz) é tal que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L}{T} \to 2B \text{ dim/seg.}$$

(com $\lambda \to 0$, definição do conteúdo fracional de energia na banda B).
Assim, o número de dimensões necessárias para representar um sinal quase limitado em t-f (duração T e banda B) é:

$$L \approx 2BT .$$

COMPREENDENDO O TEOREMA 2BT (H.M. de Oliveira)

A fim de captar os princípios por trás do Teorema 2BT, o seguinte esboço de discussão pode ser elucidativo.
Desde que o espectro $F(w)$ de um sinal $f(t)$ de suporte temporal compacto pode ser representado em série cardinal pelo dual do teorema da amostragem, tem-se:

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n}{T}\right) Sa(wT + n\pi).$$

Por hipótese, $f \in L^2$. Isto implica, via a identidade de Parseval, que $F \in L^2$ e então

$\lim_{w \to \infty} |F(w)| = 0$ e portanto, $\lim_{n \to \infty} |F(\frac{n}{T})| = 0$.

Escolhida uma banda passante finita B ($B \geq \frac{1}{T}$) para representar o sinal com "tempo limitado" em T seg. ($T<+\infty$), supondo que $BT>>1$, a série cardinal pode ser truncada em

$$F(w) \cong \sum_{n=-[BT]}^{+[BT]} F\left(\frac{n}{T}\right) Sa(wT + n\pi).$$

$[x]=nint(x)=round(x)$ denota aqui o inteiro mais próximo de x.

A dimensão do espaço de sinais com duração finita T e banda aproximada B, provido que $BT>>1$, pode ser considerada como o número de termos da série acima:

$$N=2[BT]+1.$$

A representação do espectro (e, portanto, do sinal) em dimensão finita corresponde à:

Tabela II.3 Representação vetorial de acordo com o teorema 2BT.

Sinal contínuo	Representação vetorial em $\boldsymbol{R}^N$
$F(w)$	$\left(F(-B), \ldots, F(-\frac{1}{T}), F(0), F(\frac{1}{T}), \ldots, F(B)\right)$

A aproximação vetorial é tão melhor quanto maior o valor de BT. Desprezando detalhes, a dimensão N do espaço pode ser aproximada por $N=2BT$, ou seja, $N/T = 2B$ *dimensões/seg*.

Se o sinal é fortemente limitado em banda até B Hz, então ele é praticamente ilimitado no tempo, porém requer:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N}{T} = 2B \quad \text{dim/} seg.$$

Fundamentos da Análise Estocástica

CAPÍTULO 4

4.1 BREVE REVISÃO SOBRE A TEORIA DE PROBABILIDADES

O intuito desta (muito concisa) revisão é tão somente "refrescar" a memória a fim de introduzir naturalmente os fundamentos da análise de sinais estocásticos. A idéia aqui é ilustrar as relações e as similaridades existentes entre as teorias de análise de sinais determinísticos e de sinais estocásticos.

UMA CRONOLOGIA SIMPLIFICADA

1654- Blaise Pascal (Paris) e Pierre Fermat (Toulouse)



Blaise Pascal (1623-1662) & Pierre de Fermat (1601-1665)
(criadores da teoria de Probabilidades).

Resultados da correspondência:

1657- C. Huygens (1629-1695):
Tractatus de ratiociniis in alea ludo
(Sobre o raciocínio em jogos de azar).

1713- Jaques Bernoulli (1654-1705) (*post mortem*)
Ars Conjectandi - Lei fraca dos grandes des números.



ARS CONJECTANDI

Frontispício da obra de Bernoulli.

Thomas Bayes (1702-1761).

1812- Pierre de Simon Laplace (1749-1827)
Théorie analytique des probabilités
Essai philosophique des probabilités

1909- **Émile Borel** (1871-1956)
Éléments de la théorie des probabilités

Escola Russa:
Andrei Markov, Pafnuti Tchebyscheff, Liapunov

1933- **Andrei Nikolaivich Kolmogoroff** (1903-1987) e
Aleksandr Yakovlevich Kinchine – ou Khinchin (1894-1959)

Pós-guerra Michel Loève (1907-1979)

Em 1933, Kolmogorov tem sucesso em axiomatizar a teoria das probabilidades, um desafio colocado há muito tempo (e.g. desafio proposto por **D. Hilbert** http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html)



Andrey N. Kolmogorov (1903-1987).

AXIOMAS DE KOLMOGOROV Espaço de Probabilidades $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Ω → Espaço Amostral (Todos os possíveis resultados de um experimento).

$\mathcal{A}$ → Classe de eventos (Coleção apropriada de eventos, munida de uma estrutura algébrica).

P → Medida de Probabilidade (Função de conjunto não negativa, aditiva, definida na classe de eventos).

TRATAMENTO AXIOMÁTICO:

AX1.$\Omega,\mathcal{A}$, Dado um experimento qualquer, $\exists\ \Omega$, e $\exists\ \mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos (eventos).

AX2. $\forall A\in\mathcal{A}\ \exists\ P(A)\geq 0$. Cada evento A é associado a um número não-negativo.

AX3. $P(\Omega)=1$. Qualquer atribuição de probabilidade requer normalização.

AX4. Se A e $B\in\mathcal{A}$, com $A\cap B=\varnothing$, então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. A função de conjunto P é aditiva.

AX5. $\{A_i\}$ $i=1,\infty$ com $A_i\in\mathcal{A}$ com $A_i\cap A_j=\varnothing$ $i\neq j$; então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$ A função de conjunto é σ-aditiva. ■

Toda a teoria das Probabilidades está "resumida" nos axiomas! Algumas conseqüências imediatas destes axiomas resultam em propriedades bastante usuais, freqüentemente admitidas intuitivamente com verdadeiras, como ilustrado em seguida.

CONSEQÜENCIAS TRIVIAIS

1) $P(A^c)=?$
$A\cap A^c=\varnothing$. Por AX4, $P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c)$.
Logo $P(\Omega)=P(A)+P(A^c)$ e via AX3, $P(A^c)=1-P(A)$.

2) $P(\varnothing)=?$

$\varnothing\cap\Omega=\varnothing$. Por AX4, $P(\varnothing\cap\Omega)=P(\varnothing)+P(\Omega)$. De $\varnothing\cup\Omega=\Omega$, obtém-se $P(\Omega)=P(\varnothing)+P(\Omega)$, donde $P(\varnothing)=0$.

3) $P(A)\leq 1$

$P(A^c)=1-P(A)$. Por AX2, $1-P(A)\geq 0$.

4) $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$(A\cap B)\bigcap(B-A)=\varnothing$ por AX4, $P((A\cap B)\bigcup(B-A))=P(A\cap B)+P(B-A)$.

Como $(A\cap B)\bigcup(B-A)=B$, segue o resultado.

5) Monotonicidade $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

Usando $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)$, tem-se $P(A)=P(B)-P(B-A)$ por AX2 $P(B-A)\geq 0$, donde $P(A)\leq P(B)$.

Exercício 11.

6) prove que $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Na teoria axiomática, a classe de eventos é munida de uma estrutura algébrica. Considere então a seguinte definição:

ALGEBRA $\mathcal{F}$ (σ-álgebra)

Conjuntos munidos com duas operações sobre conjuntos (adição e produto): **$\cup$ e $(.)^c$**

i) $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{F}$

ii) $A\in\mathcal{F}\Rightarrow A^c\in\mathcal{F}$. ■

A classe $\mathcal{F}$ é fechada com todas as operações sobre conjuntos, e.g. $A\cap B$, $A-B$, $A\Delta B$. (N.B.-na σ-álgebra, o número de operações pode ser infinito). (p.ex.: $A, B\in\mathcal{F}\Rightarrow A^c, B^c\in\mathcal{F}$ logo $A^c\cup B^c\in\mathcal{F}\Rightarrow (A^c\cup B^c)^c\in\mathcal{F}$, ou seja, $A\cap B\in\mathcal{F}$.

PROBABILIDADE TOTAL.

$\cup_{i=1}^{n}\{A_i\}_{i=1}^{n}$ é uma partição de $\Omega \Leftrightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ e $A_i\cap A_j=\varnothing\ \ i\neq j$.

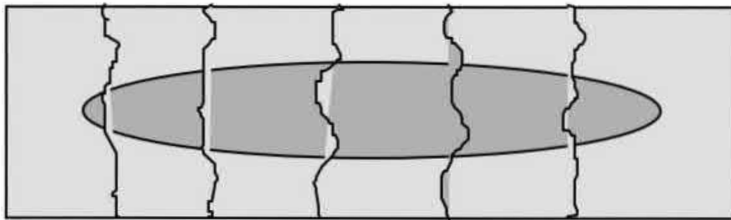


Figura 4.1 Ilustração da lei da probabilidade total em diagrama de Venn.

Em uma partição, $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = P(B)$.

Um outro conceito fundamental na teoria de probabilidades é o conceito de probabilidade condicional.

PROBABILIDADE CONDICIONAL.

Qual a probabilidade da ocorrência do evento B, sabendo-se que um outro evento A ocorreu? Há aqui três eventos a considerar: A, B, $A \cap B$, com probabilidades P(A), P(B), $P(A \cap B)$, respectivamente.

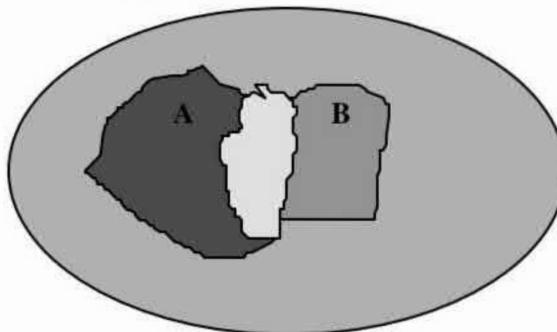


Figura 4.2 Ilustração (Venn) para a definição de probabilidade condicional.

Desde que A ocorreu, o espaço amostral foi reduzido e a distribuição precisa ser atualizada. A nova medida de probabilidade P' (induzida) também deve obedecer aos axiomas de Kolmogorov.

$$P'(X \subseteq A) = P(X)/P(A).$$

Com $X = A \cap B$ $\quad P'(A \cap B) = P(A \cap B)/P(A)$.

B só ocorre agora se há ocorrência de A∩B. Define-se então:

P(B/A):= P(A∩B)/P(A)

A probabilidade condicional é uma medida de probabilidade (obedecendo aos axiomas básicos) induzida a partir da medida original. O conhecimento da ocorrência de um evento particular implica na redução do espaço amostral, o qual passa a ser o evento que é sabido ter ocorrido. A normalização A3 exigida é então realizada. Esta interpretação segue a via freqüentista.
P(A∩B)=P(A) P(B/A) e P(A∩B∩C)=P(A) P(B/A)P(C/ A∩B).

REGRA DE BAYES



Rev. Thomas Bayes (1702-1761).

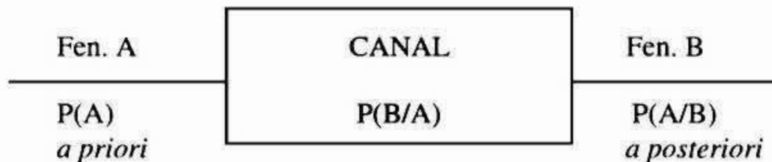


Figura 4.3 Regra de Bayes: relação entre *a priori* e *a posteriori*. O canal de comunicações.

A probabilidade *a posteriori* de um evento A pode ser calculada em termos da probabilidade *a priori* deste evento.

P(A/B)=P(A∩B)/P(B)= P(B/A). P(A) / P(B).

Os eventos A e B são independentes quando:

INDEPENDÊNCIA→ P(B/A)=P(B).

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

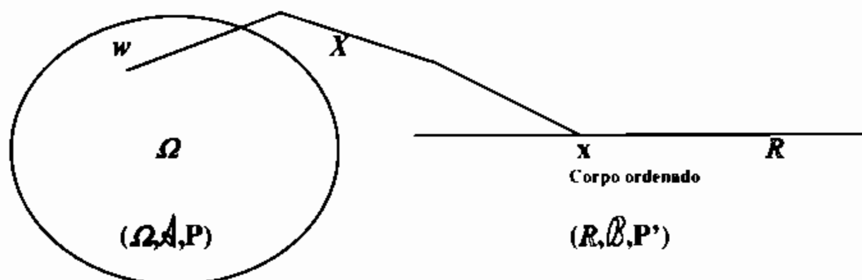


Figura 4.4 Variável aleatória como mapeamento entre espaços de probabilidade.

Os espaços de probabilidade são mapeados pela variável aleatória.
$\mathcal{A}$ álgebra de eventos $\mathcal{B}$ álgebra de intervalos (Borel)

X função mensurável

$$P(X \leq x) = P\{w \in \Omega: X(w) \leq x\}.$$

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

FDP $F_X(x) = P(X \leq x)$.

FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

fdp $f_X(x) = \text{d}\, P(X \leq x)/\text{d}x = \text{d}\, F_X(x)/\text{d}x$.

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad P(B) = \int_B f_X(x)\text{d}x \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = P(\Omega) = 1.$$

A definição de função densidade de probabilidade é adequadamente apresentada empregando a integral de Lebesgue (vide Apêndice B). Os conjuntos que constituem a σ-álgebra de eventos são mensuráveis e mapeados através de X resultam em conjuntos da álgebra de Borel na reta. Assim, a medida induzida no espaço **($\mathbb{R}$,$\mathcal{B}$,P')** é exatamente a medida de Lebesgue sobre a álgebra de Borel (Apêndice B).

MOMENTOS E MOMENTOS CENTRAIS

$m_n := E(X^n)$ entre os quais o mais importante é $m_1 = E(X)$ média

$\mu_n := E\{(X - m_1)^n\}$ entre os quais o mais importante é $\mu_2 = \sigma^2$ variância

DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV


Pafnuti L. Chebyshev (1821-1894).

Suponha Y uma variável aleatória com média nula e variância finita, $m_y = 0$ e $\sigma_y^2 < +\infty$, e função densidade de probabilidade $f_Y(y)$.

$\sigma_y^2 = E(|y|^2) = \geq \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)dy \geq \int_{|y| \geq \epsilon}^{+\infty} y^2 f(y)dy$, ou seja, $\sigma_y^2 \geq \epsilon^2 P(|y| \geq \epsilon)$.

Para uma variável aleatória $Y := X - m_X$, tem-se

$$P(|X - m_X| \geq \epsilon) \leq \sigma_X^2 / \epsilon^2 \quad \text{Chebyshev}$$

Entre os conceitos mais utilizados e mais básicos de teoria envolvendo comportamento estocástico, encontra-se a noção fundamental de independência (independência estatística).

CORRELAÇÃO E INDEPENDÊNCIA

Sejam X, Y variáveis aleatórias. Dois tipos de momentos conjuntos são definidos, a saber:

- Momento Conjunto

$m_{n.k} := E(X^n Y^k)$

$m_{11} = E(XY) = R_{XY}$ Correlação entre X e Y

- Momento central conjunto

$\mu_{n,k}$:=E$\{(X\text{-}m_X)^n (Y\text{-}m_Y)^k\}$

μ_{11}=E$\{(X\text{-}m_X)(Y\text{-}m_Y)\}$=$K_{XY}$ Covariância entre X e Y

Cov(X,Y)= K_{XY} =E$\{(X\text{-}m_X)(Y\text{-}m_Y)\}$= E($XY$)- $m_X\, m_Y$

- K_{XY} = R_{XY} - $m_X\, m_Y$ Cov(X,Y)= R(X,Y) - m_X m_Y

As seguintes relações podem ser estabelecidas:

Independência $\Leftrightarrow$ E(X^nY^k)= E(X^n) E(Y^k) $\forall n,k$

Não correlação $\Rightarrow$ E(XY)= E(X) E(Y).

Note que
X e Y independentes $\Rightarrow$ X, Y não correlacionadas,
porém a inversa em geral não é verdadeira.

4.2 ARITHMETICA PROBABILITAS

Extrato de artigo por **H.M. de Oliveira, R.J. de Sobral Cintra, R.M. Campello de Souza**

A Teoria da medida constitui uma ferramenta com papel decisivo em Matemática e Estatística. Em particular, a medida de Lebesgue proporcionou um grande avanço na teoria da integração [BART 1966], [WEI 2000] e caiu como uma luva na axiomatização do conceito de probabilidade por Kolmogorov [LOE 1963]. Embora a potência da análise real seja incontestável, há um incontável número de situações (teóricas e práticas) nas quais a teoria dos números é imprescindível. O domínio completo dos computadores digitais é limitado ao anel de racionais diádicos. A observação direta do mundo físico produz apenas números exatamente como os que os computadores digitais podem usar. Este trabalho insere-se nas criticas centenárias de **Leopold Kronecker** sobre o "infinito completo", segundo quem a nada poderia ser atribuída uma existência matemática, exceto se possível construí-lo em termos de um número finito de inteiros positivos. Ele propunha a "aritmetização" da

matemática, assegurando: "E se eu não for capaz de fazê-lo, será realizado pelos que me seguirão". Vale a citação mais conhecida de Kronecker: "*God created the integers, all else is the work of man*." Como aproximar a teoria dos números e probabilidade? **Deshouilles** categoriza os tipos de elo entre estas teorias [DES 1997]. Diversos trabalhos indicam a ligação profunda da função zeta de Riemann com os números primos, teoria dos números e interpretações probabilísticas [GOLO 1992], [ALEX *et al.* 1993], [GAD&PAD 2002]. Esta ligação foi objeto de fascinação de matemáticos com Hardy, Littlewood, Erdös, Kac e Pólya, para citar alguns, ou modernamente, Golomb e Chaitin, por exemplo.

> Considere os inteiros divisíveis por ambos p e q (primos). Ser divisível por p e q equivale a ser divisível por $p.q$ e conseqüentemente a densidade deste novo conjunto é $1/p.q$. Ora, $1/p.q=(1/p).(1/q)$ e isto pode ser interpretado dizendo que os eventos "ser divisível por p" e "ser divisível por q" são independentes. Isto se verifica para todos os primos, daí de forma burlesca e não rigorosa, os números primos estão envolvidos com probabilidades! Esta observação simplória, beirando o trivial, é o ponto de partida de um novo desenvolvimento que pode ligar a teoria dos números com a teoria da probabilidade [KAC 1959]

Os problemas de teoria dos números constituem um desafio a parte no capítulo da matemática [PÓL 1957], [RIE 1985]. Seguindo uma analogia do sucesso da definição clássica da medida de Lebesgue, poder-se-ia esperar algum valor em uma teoria da medida definida sobre os inteiros. É precisamente desta questão que trata a presente abordagem. O propósito aqui é apresentar preliminares sobre uma medida aritmética, ambos do ponto de vista teórico e de engenharia. O espaço de interesse e a classe de conjuntos sobre a qual se define a medida são introduzidos a seguir.

Seja $\Omega:=\boldsymbol{N}$ o conjunto dos números naturais, um espaço amostral, munido de uma (pseudo)densidade de probabilidade uniforme sobre todos os elementos de $\boldsymbol{N}$. O conjunto das partes $\mathrm{A}=\mathrm{P}(\boldsymbol{N})$ forma uma álgebra (σ-álgebra) com relação a união e complementos entre conjuntos [LOE 1963], [RUD 1971]. Conjuntos possíveis da álgebra incluem, por exemplo, $A_0:=\varnothing$, $A_1:=\{1,2,3,...\}$, $A_2:=\{1,3,5,7,...\}$, $A_3:=\{2,3\}$ $A_4:=\{1,1,2,3,5,8,13,...\}$ (conjunto de Fibonacci), $A_5:=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,...\}$ (conjunto dos números primos), $A_6:=\{5,7,10,12,15,17,20,...\}=\{5n \text{ ou } floor\left(\frac{10n+5}{2}\right), \forall n\in\boldsymbol{N}\}$ (inclui todos os múltiplos de 5 e o piso da média de quaisquer múltiplos

consecutivos), A_7:={ $floor\left(\frac{3n+1}{2}\right)$, $n>1$ }, A_8:= { $ceil\left(\frac{3n+1}{2}\right)$, $n>1$ }, etc.
floor(.) e *ceil*(.) denotam as clássicas funções piso e teto. O símbolo ":=" denota "igual por definição".
A medida de probabilidade μ definida sobre esta estrutura permite construir um espaço de probabilidades ($\boldsymbol{N}$,P($\boldsymbol{N}$),μ). A probabilidade de cada conjunto pode ser avaliada, i.e., qualquer subconjunto dos números naturais é mensurável.

A "Aritmetização" de Medidas Físicas

Medições sobre o conjunto dos reais requerem um número infinito de bits para especificar sua expansão binária. O conjunto L de valores medidos de uma dada variável física tem *sempre* precisão limitada. A menor discriminação possível é referida como um quantum. Se o quantum Q é um número racional, então ($\exists k$) inteiro positivo tal que $k.Q$ é um inteiro e o conjunto $k.L\subset \boldsymbol{N}$. Por exemplo, para tensões medidas entre 0 e 5V com quantum de 0,5V, os possíveis resultados de medidas são L={0, 0,5, 1,0, 1,5,...,4,5,5,0}. Neste exemplo, $2L$ é subconjunto de $\boldsymbol{N}$. Há duas facetas para encarar medições no "mundo físico":

- Ou os números reais ocorrem na natureza, mas não se consegue obter medidas com exatidão ilimitada (incerteza inerente).
- Ou a escolha da precisão especifica tudo o que se precisa conhecer, pois embora a medição possa não incorporar incerteza, há limitação na complexidade da medição.

Qualquer dos enfoques conduz a uma "aritmetização" dos valores mensuráveis e uma probabilidade aritmética é bem-vinda. Os números reais são, de algum modo, "expurgados" e um mundo digital emerge.

Medida sobre Conjunto de Inteiros.
Definição. $\forall A\in$ P($\boldsymbol{N}$), subconjunto enumerável dos naturais (finito ou não), seja

$$\forall A\in\ \mu(A):=\lim_{s\to 1+}\mu_s(A)\text{, em que }\mu_s(A):=\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}=\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)},\ s>1.$$

$\zeta(.)$ denota a função zeta de Riemann [GRA&RYZ 1965]. Note que para cada $s>1$, ambos o numerador e denominador são definidos e finitos. A necessidade de incluir $s>1$ advém da não convergência da série harmônica. Note ainda que para $s=0$, a medida poderia ser usada para conjuntos enumeráveis $A\subseteq\{1,2,3,...,N\}:=N^T$ de cardinalidade finita, resultando na clássica interpretação

$$\mu_0(A)=\frac{\sum_{n\in A}1}{\sum_{n\in 1}^{T}1}=\frac{\| A \|}{\| N^T \|}.$$

Ver-se-á que μ é uma função de conjunto não negativa e aditiva. O espaço definido pela tripla é um espaço de probabilidades de Kolmogorov [LOE 1963]. Os axiomas A2 ($\mu(A)\geq 0$) e A3 ($\mu(\Omega)=\mu(N)=1$) são prontamente verificados. A medida é aditiva (A4), i.e., para conjuntos disjuntos $A\cap B=\varnothing$, tem-se $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$, pois

$$\frac{\sum_{n\in A\cup B}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}=\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}+\frac{\sum_{n\in B}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}.$$

Algumas Conseqüências Triviais.

i) $\mu(\varnothing)=0$, pois $\mu(\varnothing\cup \mathrm{N})=1$.

ii) monotonicidade $-\forall A\subset B \;\Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$.

Veja que

$$\mu_s(B)=\frac{\sum_{n\in B}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}=\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}+\frac{\sum_{n\in B-A}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}\geq\mu_s(A).$$

iii) $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A\cap B)$

iv) $\mu(A^c)=\mu(N-A)=\mu(N)-\mu(N\cap A)=1-\mu(A)$.

Propriedade.

Todo subconjunto próprio $A\subset N$ com número finito de elementos, $\|A\|<\infty$, tem medida nula. (aqui $\|.\|$ denota a cardinalidade do conjunto).

Prova. Dado $s>1$, $\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}\leq\sum_{n\in A}\frac{1}{n}=K<\infty$. Então

$$\mu(A)=\lim_{s\to 1+}\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)}\leq\lim_{s\to 1+}\frac{K}{\zeta(s)}=0\,.\ \blacksquare$$

Corolário. A probabilidade de um número natural isolado $I_m:=\{m\}$ é nula.

Os conjuntos de medida não nula $A\subset\mathbf{N}$ são apenas aqueles de cardinalidade $\|A\|=\|\mathbf{N}\|=\aleph_0$. (Aleph zero). Extrapolando, e com um abuso de notação, é como se fosse utilizada uma medida concentrada nos inteiros (pente de Dirac) com áreas iguais a $1/\aleph_0$! É claro que numericamente, isso não tem absolutamente nenhum sentido! Esta abordagem, entretanto, dá sentido claro à assertiva <<*escolher um inteiro positivo ao acaso de tal forma que os números inteiros tenham todos uma mesma chance de serem escolhidos*>>.

Cálculos envolvendo distribuições arbitrárias podem ser facilmente conduzidos considerando:

Definição. $\forall A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})$, subconjunto enumerável dos naturais (finito ou não), seja

$$\forall A\in\ \pi(A):=\lim_{s\to 1+}\frac{\sum_{n\in A}\frac{p[n]}{n^s}}{\zeta(s)},$$ em que $\{p[n]\}_{n=1}^{\infty}$ é uma distribuição de probabilidade, no sentido que $\sum_{n\in N}p[n]=1$, com $p[n]\geq 0$.

É claro que a medida $\pi(.)$ é bem estabelecida, pois $\pi(A)\leq\mu(A)$.
Para lidar eficientemente com conjuntos enumeráveis, uma medida mais *fraca* que $\mu(.)$ pode ser desejável. Desde que a maior parte da análise no contínuo adota $L^2(\mathbf{R})$ ao invés de $L(\mathbf{R})$, parece razoável propor o uso da medida

$$\mu_2(A)=\frac{\sum_{n\in A}\frac{1}{n^2}}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n\in A}\frac{1}{n^2}$$

e todos os problemas de convergência desaparecem.
Os conceitos de probabilidade e informação vêm se influenciando mutuamente desde o século XIX. A introdução desta medida possibilita

definir formalmente uma entropia de Shannon [SHAN 1993] associada a um subconjunto de inteiros.

Definição. A entropia de um conjunto $A \in \mathcal{P}(N)$ é a quantidade

$$H_s(A) := -\sum_{n\in A} \frac{1}{\zeta(s)n^s}.\log_2\left(\frac{1}{\zeta(s)n^s}\right) \text{ em que } H(A) := \lim_{s\to 1} H_s(A).$$

Em particular, como mostrado por **Solomon Golomb** [GOLO 1992], tem-se $H_s(N) = \log\zeta(s) - \frac{s\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ para o conjunto ***N***. Uma entropia para s=2 pode ser conveniente em muitas situações, resultando em:

$$H_2(A) = \frac{2}{\zeta(2)}\sum_{n\in A}\frac{\log(n)}{n^2} + \frac{\log(\zeta(2))}{\zeta(2)}\sum_{n\in A}\frac{1}{n^2}.$$

Conjuntos especiais.

($\forall q \in N$), seja M_q o conjunto de todos os múltiplos de q. Por exemplo, tem-se $M_2=\{2,4,6,8,...\}$; $M_5=\{5,10,15,20,...\}$. É claro que $\|M_q\|=\aleph_0$ e tais conjuntos são mensuráveis.

A medida dos conjuntos do tipo M_q é $\mu(M_q) = \frac{1}{q}$, o que pode ser verificado trivialmente, pois

$$\mu_s(M_q) = \frac{\sum_{n\in N}\frac{1}{(qn)^s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{q^s}\frac{\sum_{n\in N}\frac{1}{n^s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{q^s}.\mu_s(N).$$ Obviamente $\mu(M_1) = \mu(N)=1$.

Assim, $\mu(M_2) = \frac{1}{2}$, $\mu(M_5) = \frac{1}{5}$, etc.

Tem-se $\mu_2(N)=1$, $\mu_2(M_p)=1/p^2$ etc. A entropia do conjunto dos inteiros positivos ***N*** vale $H_2(N) = \log_2\zeta(2) - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}$. Como $\zeta(2) = \pi^2/6$ e $\zeta'(2) = \pi^2/6[C + \ln(2\pi) - 12\ln(A)]$ (em que A é a constante de Glaisher-Kinklein), encontra-se: $H_2(N) = 1{,}857952...$

Também vale:

$$H_2(M_p) = \frac{1}{p^2}H_2(N) - \frac{1}{p^2}.\log_2\frac{1}{p^2}.$$

Uma interpretação pouco rigorosa.

Interessante observar que esta medida segue a via freqüentista. Supondo uma densidade uniforme sobre os inteiros, como sugerido no início do texto, seja T um operador de truncamento. Dado $\mathbf{N}$, denote-se $\mathbf{N}^T$:={1,2,3,...,T} e para um conjunto qualquer M, defina o conjunto truncado M^T como sendo $M \cap \mathbf{N}^T$. Estes conjuntos são enumeráveis e finitos e pode-se tomar

$$\Pr(M^T) := \mu_0(M^T) = \frac{\| M \cap N^T \|}{\| N^T \|} = \frac{\text{n. casos favoráveis}}{\text{n. total de casos}} \text{ e } \mu(M) = \lim_{T \to \infty} \Pr(M^T).$$

Por exemplo, truncando o conjunto M_2 até o $2T$-ésimo inteiro, denotado $M_2^{2T}=\{2,4,6,...,2T\}$, tem-se $\Pr(M_2^{2T}) = \frac{T}{2T} = \frac{1}{2}$ e no limite, $Pr(M_2)=1/2$ (irrelevante se o último elemento não é par). As "chances" de recair sobre um número par em toda a reta são 50% (*By chance I mean the same as probability*, **T. Bayes**). Este é a medida μ do conjunto M_2. Identicamente, o fato ocorre com M_5 (múltiplos de 5), cuja medida vale 1/5 (no limite $T \to \infty$, há 20% de possibilidade de recair sobre um múltiplo de 5 na reta inteira). Esta abordagem é mais bem compreendida considerando sinais elétricos $M_3(t)$ e $M_5(t)$ associados aos conjuntos M_3 e M_5.

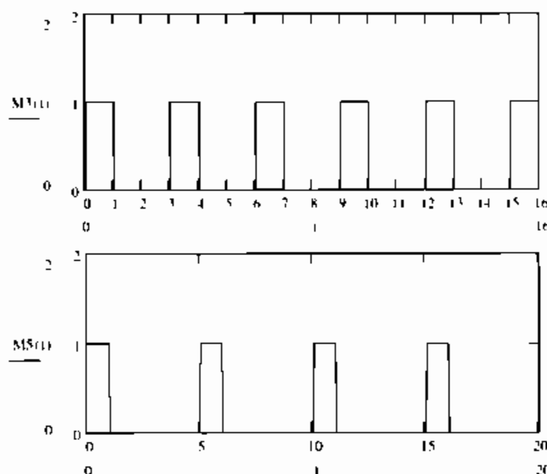


Figura 4.5 Sinais elétricos $M_3(t)$ e $M_5(t)$ associados aos conjuntos M_3 e M_5, definidos pela função binária que atribui 1 para divisores de 2 (respectivamente 5), 0 caso contrário.

Observe que o valor da medida de M_k corresponde ao valor dc da forma de onda $M_k(t)$. Na interpretação de séries de Fourier, isto corresponde exatamente ao "ciclo de trabalho" da onda. Assim, para qualquer inteiro, $\mu(M_q)=\frac{1}{q}$.

Interpretação 1. O número de termos dos somatórios na definição de μ torna-se muito grande e o comportamento assintótico (médio) emerge.
Tomando um conjunto truncado $A^T := \{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{\|A^T\|}\}$, a média harmônica dos elementos de A^T é dada por

$média(A^T)=\frac{\|A^T\|}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_{\|A^T\|}}}$. Para s arbitrariamente próximo da unidade, para T muito grande ($T\rightarrow\infty$), ambos o numerador e denominador são grandes, porém a razão tende a $\mu_1(A)$,

$$\mu(A)\approx\frac{\|A^T\|/média(A^T)}{\|N^T\|/média(N^T)}=\frac{\|A^T\|}{\|N^T\|}$$ ou seja,

a fração da reta preenchida pelo elementos de A. Como conseqüência, tem-se a seguinte:

Interpretação 2. Se $\mu(A)$ denota a fração de elementos de A relativa à $\boldsymbol{N}$, então $[\mu(A)]^{-1}=\frac{1}{\mu(A)}\geq 1$ representa a distância média entre elementos de A.

A multiplicação de um conjunto por um escalar (inteiro) corresponde a um conjunto cujos elementos são multiplicados pelo escalar. Assim, $3.M_2=M_6=\{6,12,18,\ldots\}$. De um modo geral, $k.M_p=p.M_k=M_{kp}$.

Propriedade de escalonamento: $\forall k\in \boldsymbol{N}$, $\mu(kA)=\mu(A)/k$.

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS: RELAÇÃO COM A MEDIDA

- Medida da intersecção

Dados p e q inteiros, $(p,q)=1$, então $M_p \cap M_q$ tem medida dada por

$$\mu(M_p\cap M_q)=\mu(M_p).\mu(M_q)=\frac{1}{p.q}.$$

Por exemplo,

$$\mu(M_2 \cap M_3) = \mu(M_6) = \mu(M_2).\mu(M_3) = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{6}.$$

Nos casos em que p e q não são primos entre si, então

$\mu(M_p \cap M_q) = \mu(M_{mmc(p,q)}) = \dfrac{1}{mmc(p,q)}$, em que mmc denota o mínimo múltiplo comum.

- Medida da união

Dados p e q inteiros distintos, então $M_p \cup M_q$ tem medida dada por

$$\mu(M_p \cup M_q) = \mu(M_p) + \mu(M_q) - \mu(M_p \cap M_q).$$

Usando o resultado anterior,

$$\mu(M_p \cup M_q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{mmc(p,q)},$$

com interpretação simples e interessante.

Se q é uma potência de um primo, i.e. $q = p^m$, p primo, então $\mu(M_q) = [\mu(M_p)]^m$.

Pelo teorema fundamental da álgebra [HAR&WRI 1979], [RIE 1985], qualquer inteiro q é fatorável na forma de potências de primos, $q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ de modo que se segue:

$$\mu(M_q) = \prod_{i=1}^{r} \mu(M_p) = \prod_{i=1}^{r} [\mu(M_{p_i})]^{m_i} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^{m_i}} = \frac{1}{q}.$$

Definição. Dois conjuntos são idênticos quase em toda parte (*presque partout*) se e só se eles diferem por um conjunto de medida nula. ■

CONJUNTOS ESPARSOS

Conjuntos de Medida nula.

- Qual a densidade de primos, i.e. qual a medida do conjunto P:={2,3,5,7,11,13,17,19,23...}?

Aludindo a uma famosa assertiva de Einstein, **Paul Erdös**[35] (único matemático a bater **Leonard Euler** em publicações) comentou: "Deus pode não jogar dados com o universo, mas há algo estranho sobre os números primos" (*God may not play dice with the universe, but something strange is going on with the prime numbers*) [Mac 1997].

Proposição. O conjunto de números primos tem medida nula, $\mu(P)=0$.

Prova. Utilizando a definição de medida, chega-se a $\mu_s(P)=\dfrac{P(s)}{\zeta(s)}$, em que $P(s):=\sum_{\text{all primes}} p^{-s}$ é a função *prime zeta-function*, relacionada com a função de Riemann por $P(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\mu(k)}{k}.\ln\zeta(ks)$, e $\mu(.)$ com argumento inteiro é a clássica função de Möbius [HAR&WRI 1979].

$$\mu(P)=\lim_{s\to 1+}\frac{P(s)}{\zeta(s)}=0\,.\ \blacksquare$$

Isto corresponde ao valor dc da forma de onda da "função indicadora de primos" $P(t)$, o qual é nulo! O mesmo acontece com o conjunto de "primos gêmeos" [BRU 1919]. Entretanto, vale observar que $\mu_2(P)=P(2)/\zeta(2)$.

- Qual a medida do conjunto de Fibonacci, F:={1,1,2,3,5,8,13,21,34...}? (**Leonardo Fibonacci**).

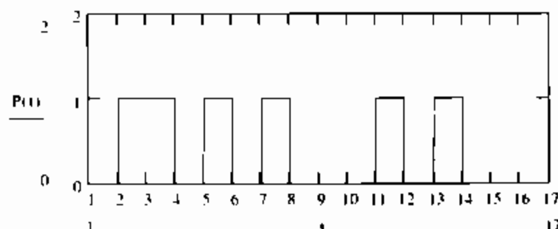


Figura 4.6 Forma de onda binária $P(t)$ correspondente ao conjunto dos números primos. A função é semi-infinita e aperiódica.

[35] O número de Erdös do autor deste livro é 4. (http://www.oakland.edu/enp).

Os elementos deste conjunto podem ser descritos via $F(n+1) = floor\left(\phi F(n) + \frac{1}{2}\right)$, em que ϕ é a razão áurea (*golden ratio*) [WEIS 2006].

Proposição. O conjunto de Fibonacci tem medida nula, $\mu(F)=0$.

Prova. É sabido [ANDRÉ 1989] que a soma dos recíprocos dos números de Fibonacci positivos converge para uma constante conhecida como *reciprocal Fibonacci constant*. Conseqüentemente, para $s > 1$, vem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n)^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n)} = 3.359885\ldots$$

Assim, tem-se que:

$$\mu(F) = \lim_{s \to 1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n)^s}}{\zeta(s)} < \lim_{s \to 1} \frac{3.359885\ldots}{\zeta(s)} = 0 \cdot$$

Entretanto, a medida $\mu_2(F)$ não é nula e vale $\mu_2(F)$=0,867099... ■

MEDIDA DE CONJUNTOS TRUNCADOS DE TEORIA DOS NÚMEROS.

Uma avaliação da velocidade de convergência para a medida de um conjunto A pode ser feita considerando a medida de freqüência relativa do conjunto truncado A^T, aumentando gradativamente o valor de T.

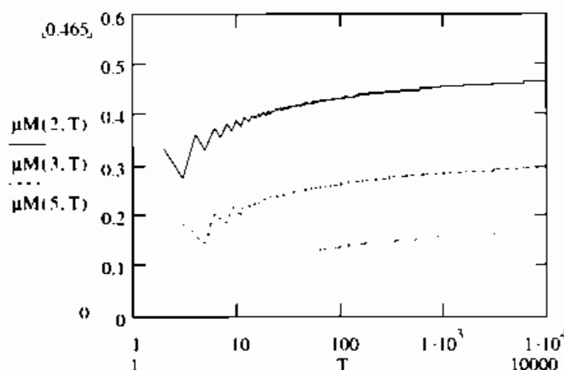


Figura 4.7 Medida dos conjuntos truncados M_2^T, M_3^T e M_5^T para diversos valores de T.

Para o caso de conjuntos de média nula, esta abordagem é particularmente proveitosa. Embora o conjunto dos primos seja *assintoticamente esparso* (com medida nula), é bastante útil trabalhar em termos de densidade de primos truncada. Para estimativas de usando este método, pode ser empregada a função psi de **Euler** [ABRA&STE 1968], definida por $\psi(x):=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$, em que $\Gamma(x)$ é a função fatorial generalizado. A relação de psi com a série harmônica truncada pode ser usada para estabelecer que $\sum_{n=1}^{T}\frac{1}{T}=\psi(T+1)+C$, em que C=0.5772156... é a constante de Euler-Mascheroni. Neste caso, necessita-se medir um conjunto $P^T=(n$ tal que n é primo, $n<T)=P\cap N^T$. Uma abordagem, considera a "fração" de números primos que se encontra presente na reta inteira (positiva) até T.

$$\Pr(P^T)=\mu_0(P^T)=\frac{\| P\cap N^T \|}{\| N^T \|}=\frac{\pi(T)}{T},$$

lembrando que a função $\pi(x)$ de teoria dos números expressa o número de primos menores ou iguais a x. Uma boa estimativa para a cardinalidade de P^T pode ser obtida via o Teorema de Números Primos (**Hadamard** e **de Vallée-Poussin**) [RIE 1985]:

$$\Pr \mathrm{P}(P^T):=\frac{1}{T}li(T)\cong\Pr(P^T),$$

em que $li(.)$ denota a integral logarítmica $\int_0^x\frac{dt}{\ln(t)}$ (tomada no sentido do valor principal de Cauchy, vide Apêndice A). A curva mostrada em seguida corresponde à aproximação usando a integral logarítmica [ABRA&STE 1968], e o critério de medida com base na cardinalidade dos conjuntos truncados até T.

A medida μ deste conjunto truncado vale

$$\mu(P^T)=\mu_1(P^T)=\frac{\sum_{n\in P^T}\frac{1}{n}}{\sum_{n=1}^{T}\frac{1}{n}}.$$

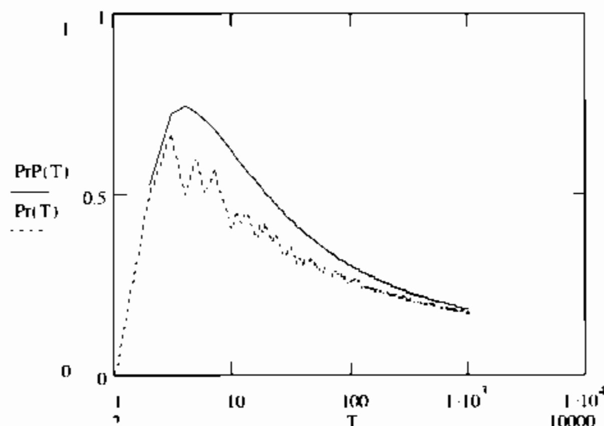


Figura 4.8 Velocidade de convergência da medida do conjunto dos primos. São mostradas as aproximações com base no teorema de Hadamard e de Vallée-Poussin (linha contínua) e a medida de freqüência relativa (linha tracejada).

Compara-se a seguir as estimativas de convergência com base na medida μ e na freqüência relativa, a medida que a cardinalidade do conjunto truncado dos primos cresce.

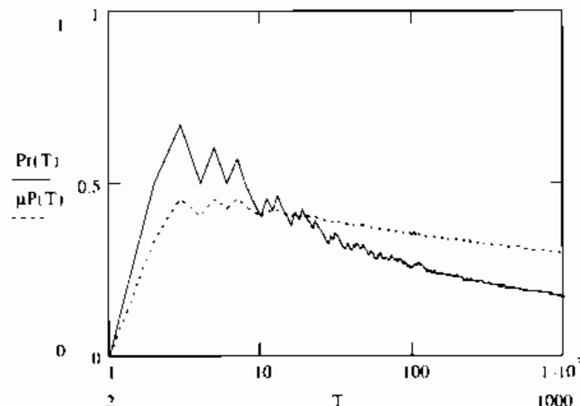


Figura 4.9 Comparação das velocidades de convergência de duas estimativas da medida do conjunto dos primos. A medida é nula. Note que a medida μ, com base na média harmônica, tende a ser mais lenta que a freqüência relativa.

Atualmente, investiga-se a ligação entre esta teoria de medida de conjuntos e implementações de processamento digital de sinais, o que pode constituir um campo promissor para aplicações e solução de diferentes problemas.

4.3 REVISANDO PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Um processo estocástico (P.E.) é uma coleção indexada de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, $t \in T$ [LATHI 1968].

A variável t pode ser discreta ou variável contínua. A cardinalidade do conjunto de índices T indica se o processo é um processo discreto ou contínuo.

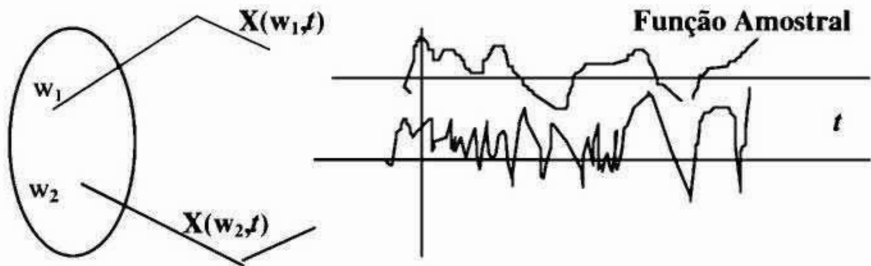


Figura 4.10 Um processo estocástico: coleção indexada de variáveis aleatórias.

Função amostral ou Realização de um P.E. (trajetória)

É uma generalização do conceito de variável aleatória (versão dinâmica): a cada instante, tem-se uma variável aleatória diferente!

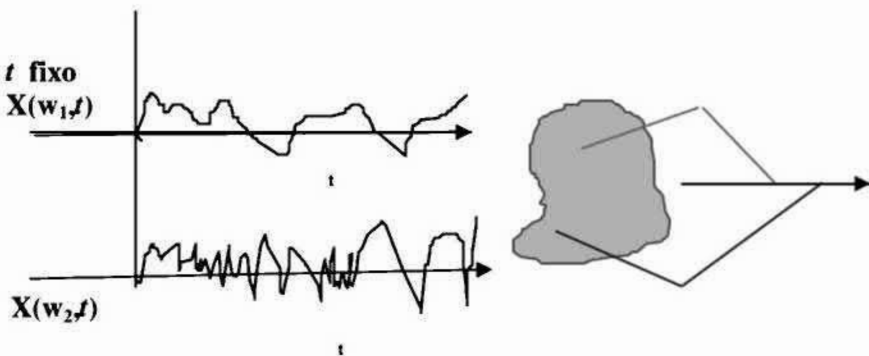


Figura 4.11 Fixado um instante arbitrário de tempo, o processo aleatório torna-se uma simples variável aleatória.

REPRESENTAÇÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS

Um Processo Estocástico fica especificado se, para qualquer coleção finita de instantes $\{t_1,t_2,...,t_k\}$, a função distribuição conjunta das variáveis aleatórias associadas é conhecida, i.e.

$$F_{x_{t1}\, x_{t2} \ldots x_{tk}}(x_1,x_2,...,x_k)=P(x_{t1}\, x_{t2} \ldots x_{tk}).$$

Estas distribuições são referidas com "Distribuições Finito-dimensionais" e obedecem (**Kolmogorov**):

1. Condição de simetria: $\forall$ permutação $j_1,j_2,...,j_k$ dos índices $1,2,..,k$,
$F(x_{j1}\, x_{j2} \ldots x_{jk};\, t_{j1}\, t_{j2} \ldots t_{jk})=F(x_1,x_2,...;t_1,t_2...t_k)$.

2. Condição de compatibilidade $\forall m<k$
$F(x_1,x_2,..x_m,+\infty,...,+\infty\, ;\, t_1,t_2...t_m,...,t_k) = F(x_1,x_2,...x_m;t_1,t_2...t_m)$.

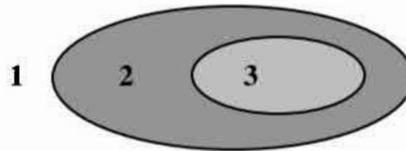


Figura 4.12 Relações de inclusão entre diferentes tipos de processo estocástico: 1- P.E. 2- P.E.E. Amplo 3- P.E.E. Estrito.

PROCESSO ESTACIONÁRIO SENTIDO ESTRITO

<u>**Definição**</u>. Um processo aleatório é dito ser *estacionário no sentido estrito* se e somente se escolhidos quaisquer instantes finitos, as funções de distribuição finito-dimensional são invariantes a um deslocamento na origem dos tempos. ■

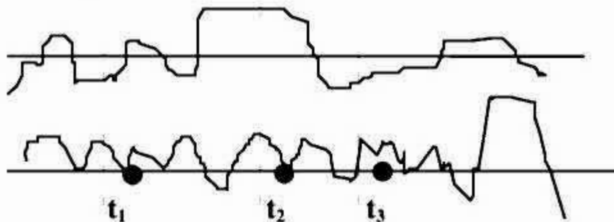


Figura 4.13 Estacionaridade de funções de distribuição finito-dimensionais (N=3). Adicionado-se o mesmo incremento aos instantes fixados t_1, t_2, t_3, recai-se sobre os instantes identificados por (•). A distribuição conjunta permanece a mesma.

$\forall \tau, \forall k,$

$$F_{X_{t1}X_{t2}\ldots X_{tk}}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=F_{X_{t1+\tau}X_{t2+\tau}\ldots X_{tk+\tau}}(x_1,x_2,\ldots,x_k).$$

CONSEQÜENCIA:
$\forall \tau \quad F_{X_{t1}}(x_1)=F_{X_{t1+\tau}}(x_1)$, i.e., mesma distribuição mantém-se durante todo o processo.

Em t_1: $\quad E(X_{t1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X_{t1}}$,

Em t_2: $\quad E(X_{t2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X_{t2}}$.

Logo $E(X_{t1})= E(X_{t2})= \ldots= E(X_t)$=constante.

O processo estocástico (P.E.) estacionário tem média única, constante. De modo geral, todos os momentos são constantes, invariantes à origem dos tempos.

PROCESSO ESTACIONÁRIO SENTIDO AMPLO

Definição. Um P.E. é dito ser *estacionário no sentido amplo* se e somente se

1. $E\{X(t)\}$= constante.

2. $E\{X^2(t)\}<+\infty \qquad \forall t\in T$

3. $\forall\, t_1, t_2\in T \qquad R_X(t_1, t_2)=R_X(t_2-t_1)=R_X(\tau)$. ■

A função de autocorrelação do processo (ACF) independe da origem dos tempos.

*Apenas a média e variância permanecem constantes ao longo do tempo.

Estacionaridade: sentido estrito $\Rightarrow$ sentido amplo

4.4 PRELIMINARES SOBRE SÉRIES DE FOURIER ESTOCÁSTICAS

Nesta seção procura-se introduzir (de modo resumido e superficial), alguns rudimentos de séries estocásticas, apenas a título de ilustrar o paralelo entre as ferramentas usadas no caso de sinais determinísticos. São abordados os processos estocásticos periódicos, as séries de Fourier estocásticas para processos estocásticos estacionários no

sentido amplo e as séries de Kahunen-Loève. A geração de fractais aleatórios (como o movimento Browniano fracional) com base em séries de Fourier é também comentada.



Michel Loève (1907-1979).

Integrais de Processos Aleatórios

Denotando um processo estocástico por $x(w,t)$, em que $w \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, então uma integral definida $y(w) := \int_a^b x(w,t)dt$, a e b finitos ou não, é uma variável aleatória. O mapeamento é expresso por:

$$\begin{aligned} y &: \Omega \to \mathrm{R} \\ w &\mapsto y(w) \end{aligned}$$

Sob condições apropriadas, se $\int_a^b E|x(w,t)|dt < +\infty$, então todas as funções amostrais são absolutamente integráveis (exceto por um conjunto de medida nula) e

$$E\int_a^b x(w,t)dt = \int_a^b E(x(w,t))dt \ .$$

Muitas vezes a integral de um processo é ponderada por uma função de peso $h(t)$, i.e. $y(w) := \int_a^b h(t).x(w,t)dt$ ou mais resumidamente, $y := \int_a^b h(t).x(t)dt$.

Em particular, a média no tempo de um processo estocástico é uma variável desse tipo:

$< x(t) > := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$, se o limite existe.

Séries para Processos Estocásticos Periódicos

Suponha que $X_t = X_{t+T}$ p.s. (p.s. $\Leftrightarrow$ igualdade quase certa, com probabilidade 1).

<u>**Definição**</u>. Um processo estocástico, estacionário no sentido amplo, com funções amostrais $\{x(t)\}$, é dito ser periódico de período T se sua função de autocorrelação é periódica de período T, $R_X(\tau)=R_X(\tau+T)$ ■

As variáveis aleatórias x_t e x_{t+T} têm a mesma distribuição para qualquer valor de t. Por conveniência e sem perda de generalidade, suponha que $E\{x(t)\}=0$. As funções amostrais podem ser desenvolvidas em série de Fourier:

$x(t) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.} \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{jnw_0 t}$, $w_0 := \frac{2\pi}{T}$, em que $x_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{jnw_0 t} dt$ é uma variável aleatória.

<u>**Propriedade**</u>. Os coeficientes da série de Fourier são não correlacionados, i.e.

$E\left(x_n x_m^*\right) = 0$, $n \neq m$.

<u>Prova</u>.

$$E\left(x_n x_m^*\right) = \frac{1}{T^2}.E\left(\int_0^T\int_0^T x(t)x^*(s)e^{-jnw_0 t}e^{jmw_0 s}dsdt\right) = \frac{1}{T^2}\left(\int_0^T\int_0^T R(t-s)e^{jnw_0(s-t)}dsdt\right)$$

Como $R(\tau)$ é periódica, ela pode ser desenvolvida em série de Fourier,

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n e^{jnw_0\tau}.$$

Então,

$$E\left(x_n x_m^*\right) = \frac{1}{T^2}\left(\int_0^T\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{j(m-k)w_0 s} e^{j(k-n)w_0 t} dsdt\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \int_0^T e^{jw_0(m-k)s}ds \int_0^T e^{jw_0(k-n)t}dt$$

e finalmente, em termos do símbolo de Kronecker,

$$E\left(x_n x_m^*\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \delta_{m,k}\delta_{k,n} = r_n \delta_{n,m}. \blacksquare$$

A energia média do processo pode ser calculada num intervalo T.

$$E\left(\int_0^T |x(t)|^2\, dt\right) = E\left[\int_0^T \sum_n x_n e^{jn\omega_0 t} \sum_m x_m^* e^{-jm\omega_0 t} dt\right] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\, T\right] = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n$$

A média é, portanto, calculada através da relação:

$$m_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E\left(\int_0^T |x(t)|^2\, dt\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \ .$$

Da mesma forma que se demonstrou, na análise de sinais determinísticos (seção 1.11), que a função de autocorrelação (temporal) de um sinal está relacionada com sua densidade espectral de potência via transformada de Fourier, i.e. $\Re_x(\tau) \leftrightarrow S_x(w)$, uma versão "equivalente" pode ser estabelecida para sinais estocásticos estacionários.
Mostra-se [MOR 1979], [MOR 1997] que

RELAÇÕES DE WIENER-KINCHINE. Teorema de Wiener–Khinchin. Para um processo estocástico estacionário, vale:

$$S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-j\omega k}$$

em que $r_x(k) = E\left(x_n x_{n+k}^*\right)$ e em que $S_x(\omega)$ é a densidade espectral de potência do processo de tempo discreto $\{x[n]\}$. Esta densidade espectral de uma seqüência aleatória discreta é periódica no domínio freqüencial. ■

NB. Freqüentemente, adota-se a notação $r_{xx}(k)$ ao invés de $r_x(k)$, e $S_{xx}(\omega)$ para $S_x(\omega)$, no intuito de explicitar que se trata de uma autocorrelação, contrapondo-se a notação r_{xy} para correlação entre variáveis aleatórias x e y. Assim, $r_{xx}(k) \leftrightarrow S_{xx}(\omega)$.

As médias agora não são tomadas no tempo, mas sim como médias estatísticas (Valor esperado). Portanto, exigir *estacionaridade no sentido amplo* para um processo estocástico é garantir que o processo tem um "espectro" e pode ser investigado usando o domínio freqüencial.




Norbert Wiener (1894-1964)   Aleksandr Y. Khinchin (1894-1959)

A Série de Fourier Estocástica

Uma série trigonométrica de Fourier pode ser obtida para um processo estocástico num intervalo arbitrário $a<t<b$. Suponha um processo estacionário no sentido amplo, sem periodicidade.

$$x(t) = \underset{N \to \infty}{l.i.m.} \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{jnw_0 t}, \quad w_0 := \frac{2\pi}{b-a}, \text{ em que } x_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t) e^{jnw_0 t} dt \text{ é}$$

uma variável aleatória.

Entretanto, diferentemente do caso de processos aleatórios periódicos, os coeficientes x_n são correlacionados para $T=b-a$ finito. Pode ser demonstrado [DAVE&ROOT 1959] que

$$\underset{T \to \infty}{l.i.m.} \; TE\left(x_n x_m^*\right) = 0.$$

Numa representação trigonométrica, com $w_0 := \frac{2\pi}{b-a}$, tem-se que

$$x(t) \cong \frac{x_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{cn} \cos nw_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{sn} sennw_0 t, \text{ em que os coeficientes}$$

$$x_{cn} = 2\Re e(x_n) = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t) \cos nw_0 t dt \text{ e}$$

$$x_{sn} = 2\Im m(x_n) = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t) sennw_0 t dt$$

são variáveis aleatórias. Também pode ser demonstrado [DAVE&ROOT 1959] que

$$\underset{T \to \infty}{l.i.m.} \; TE\left(x_{cn} x_{cm}\right) = \delta_{n,m} \; ; \; \underset{T \to \infty}{l.i.m.} \; TE\left(x_{sn} x_{sm}\right) = \delta_{n,m} \text{ e } \underset{T \to \infty}{l.i.m.} \; TE\left(x_{cn} x_{sm}\right) = 0.$$

4.5 AS EXPANSÕES DE KAHUNEN-LOÈVE

Séries (generalizadas) estocásticas ortogonais com coeficientes descorrelacionados foram propostas por Kahunen e Loève (tema trabalhado por **Kari Kahunen**, sob orientação de **Michel Loève**). Dado um processo estocástico estacionário no sentido amplo, o processo pode ser decomposto em um intervalo arbitrário (a,b) sob a forma:

$$x(t) = \underset{N \to \infty}{l.i.m.} \sum_{n=-N}^{N} \sigma_n x_n \phi_n(t) \text{ , } a \le t \le b \text{ , com}$$

- $\int_a^b \phi_n(t)\phi_m^*(t)dt = \delta_{n,m}$ (série ortogonal)
- $E\left(x_n x_m^*\right) = \delta_{n,m}$ (coeficientes descorrelacionados)

A função de autocorrelação $R(t,s)$ do processo pode ser calculada via

$$R(t,s) = E\left(x_t x_s^*\right) = E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n x_n \phi_n(t) . \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^* x_k^* \phi_k^*(s)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sigma_n|^2 \phi_n(t)\phi_n^*(s) \text{ ,}$$

$$a \le t, s \le b \text{ .}$$

Agora, a seguinte integral: $\int_a^b R(t,s)\phi_k(s)ds$ pode ser avaliada.

$$\int_a^b R(t,s)\phi_k(s)ds = \sum_n |\sigma_n|^2 \phi_n(t) \int_a^b \phi_n^*(s)\phi_k(s)ds \Rightarrow$$

$$\int_a^b R(t,s)\phi_k(s)ds = |\sigma_k|^2 \phi_k(t) \text{ .}$$

Na linguagem de operadores, $|\sigma_k|^2$ são autovalores e $\phi_k(s)$ autovetores da transformação integral com núcleo $R(t,s)$.

$T(\phi_k) := \int_a^b R(t,s)\phi_k(s)ds$ e $T(\phi_k) = \lambda\phi_k$.

As funções $\{\phi_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ da decomposição ortogonal devem obedecer à equação integral

$$\int_a^b R(t,s)\phi(s)ds = \lambda\phi(t) \text{ , } \quad a \le t \le b \text{ .}$$

Suponha que a equação integral é obedecida. Mostra-se então que os coeficientes da série estocástica são não correlacionados.

O coeficiente de Fourier é dado por:

$$\sigma_n x_n = \int_a^b x(t)\phi_n^*(t)dt\ .$$

Então,

$\sigma_n\sigma_m E\left(x_n x_m^*\right) = E\int_a^b x(t)\phi_n^*(t)dt\int_a^b x^*(s)\phi_m(s)ds = \int_a^b\int_a^b R(t,s)\phi_n^*(t)\phi_m(s)dtds =$
$\int_a^b \phi_n^*(t)\,|\,\sigma_m\,|^2\phi_m(t)dt = |\,\sigma_m\,|^2\ \delta_{n,m}.$

O teorema da energia no intervalo $a \le t \le b$ é expresso por:

$$E\left(\int_a^b |\,x(t)\,|^2\ dt\right) = E\left[\int_0^T \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x_n\phi_n(t)\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k^* x_k^*\phi_k^*(t)\right] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty}|\,\sigma_n\,|^2|\,x_n\,|^2\right]$$

ou seja, $E\left(\int_a^b |\,x(t)\,|^2\ dt\right) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}|\,\sigma_n\,|^2\right].$

Teorema da Amostragem para Processos Estocásticos

De forma similar à descrição apresentada para sinais determinísticos (Teorema de Shannon-Nyquist-Kotel'nikov, seção 1.20), há versões de teorema da amostragem para processos estocásticos.

Definição. Um processos estocástico $x(t)$, estacionário no sentido amplo e com função de autocorrelação $R_x(\tau) \leftrightarrow S_x(w)$, é dito ser banda limitada em f_m Hz *se e somente se* sua densidade espectral de potência verifica $S_x(w) = 0,\ \forall\,|\,w\,|> 2\pi f_m$. ■

Para um processo deste tipo, a ACF pode ser representada sob a forma

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x\left(\frac{n}{2f_m}\right)Sa(w_m t - n\pi)\ ,$$

em que $\left\{R_x\left(\frac{n}{2f_m}\right)\right\}$ são amostras da função de autocorrelação.

Mostra-se que um processo estocástico banda limitada em f_m Hz pode ser descrito por amostras eqüiespaçadas, colhidas em uma taxa de $2f_m$ amostras por segundo. Para N suficientemente grande

$$x(t) = x_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} x(\frac{n}{2f_m}) Sa(w_m t - n\pi)$$

em que $\left\{x(\frac{n}{2f_m})\right\}$ são amostras regulares do processo e a convergência se dá no sentido que

$$\underset{N \to \infty}{l.i.m.} \ x_N(t) = x(t) \text{, ou seja, } \underset{N \to \infty}{l.i.m.} \ E\left\{\left|x_N(t) - x(t)\right|^2\right\} = 0 .$$

4.6 PROCESSO ESTOCÁSTICO BRANCO (RUÍDO BRANCO)

O processo estocástico (estacionário pelo menos no sentido amplo) com densidade espectral constante é associado ao ruído branco, em analogia à cor branca (que contém todas as cores com igual intensidade, em diversos comprimentos de onda). Assim, para um P.E. branco, tem-se que sua densidade espectral é:

$$S_x(w) = \frac{\aleph_0}{2} \ (\forall w),$$

expressa em Watts/Hz, valor usualmente denotado pela letra Aleph ($\aleph$).

Pelo teorema de Wiener-Kinchine, $R_x(\tau) \leftrightarrow S_x(w)$ de modo que

$$\frac{\aleph_0}{2}\delta(\tau) \leftrightarrow \frac{\aleph_0}{2} .$$

Este é apenas um modelo teórico (porém extremamente útil para aproximações e cálculos): a potência P_n de um ruído branco é infinita, pois

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(w)dw = +\infty .$$

A função de autocorrelação (ACF) do processo branco é impulsiva, $R_x(\tau) = \frac{\aleph_0}{2}\delta(\tau)$, de forma que qualquer que seja $\tau \neq 0$, duas amostras $x(t)$ e $x(t+\tau)$ desse processo são descorrelatas, não importando quão próximas estejam. Isso só é possível (para $\tau \to 0$) em um processo de energia infinita, o qual pode variar abruptamente de um instante a outro.

Um processo estocástico (ruído) branco só diz respeito à densidade espectral de potência e, portanto, o grau de correlação entre amostras – e não acerca de distribuições. É possível se ter um ruído branco gaussiano, um ruído branco impulsivo etc. (no primeiro, além de um processo "branco", as distribuições são gaussianas; no segundo, além de um processo "branco", as distribuições são laplacianas etc.). Um caso particular e aquele de maior interesse é o *processo gaussiano branco*. Como a não-correlação equivale à independência no processo gaussiano, todas as amostras do processo são independentes! *Todas* as funções finito-dimensionais são conjuntamente gaussianas, com matriz de correlação diagonal (variáveis independentes).

SÉRIES DE KAHUNEN-LOÈVE DE PROCESSO BRANCOS

A decomposição em séries estocásticas de um processo estocástico branco é deveras curiosa. Para um ruído branco, $R_x(t,s) = \frac{\aleph_0}{2}\delta(t-s)$, de modo que a equação integral de Kahunen-Loève envolve

$$\int_a^b R(t,s)\phi(s)ds = \frac{\aleph_0}{2}\int_a^b \delta(t-s)\phi(s)ds = \frac{\aleph_0}{2}\phi(t).$$

Então, em *qualquer* sistema ortogonal $\{\phi_k(t)\}$, os coeficientes da série são variáveis aleatórias não correlacionadas e *qualquer* decomposição ortogonal é uma decomposição de Kahunen-Loève, com autovalor $\lambda = \frac{\aleph_0}{2}$. Ademais, em um processo branco Gaussiano, todos os coeficientes de Fourier estocásticos da série generalizada, $(\forall n)\ \ \sigma_n x_n = \int_a^b x(t)\phi_n^*(t)dt$, são variáveis aleatórias *gaussianas independentes*. Este modelo é largamente usado em desenvolvimentos teóricos e como "modelo de ruído" na análise do efeito de ruído (processo aleatório) em sistemas.

Um outro processo muito conveniente é o processo aleatório branco com limitação em banda passante, o qual apresenta uma densidade espectral constante apenas numa dada faixa espectral. Como exemplo, seja o processo estacionário cuja densidade espectral de potência é expressa por:

$$S_x(w) = \frac{\aleph_0}{2} \quad \text{em } |w| \leq \Omega.$$

Como $S_x(w) = \frac{\aleph_0}{2}\prod\left(\frac{w}{2\Omega}\right)$, então a autocorrelação deste processo vale

$$R_x(\tau) = \frac{\aleph_0}{2}\frac{\Omega}{\pi}.Sa(\Omega\tau).$$

Para determinar uma expansão ortogonal não correlacionada (Kahunen-Loève), o conjunto ortogonal usado deve ser aquele das *funções prolate esferoidais*. Desenvolvendo a série no intervalo $|t|<T$, a equação integral que deve ser satisfeita por $\{\phi(t)\}$ é

$$\int_{-T}^{T} R(t,s)\phi(s)ds = \frac{\aleph_0}{2}\frac{\Omega}{\pi}\int_{-T}^{T} Sa(\Omega(t-s))\phi(s)ds = \lambda\phi(t) \text{ em } |t|<T.$$

Ora, as funções "prolate-esferoidais" obedecem (vide Seção 1.9), $\int_{-T}^{T} Sa\,(\Omega\,(t-\tau))\phi(\tau)d\tau = \lambda_0\phi(t)$, de modo que

$$\int_{-T}^{T}\frac{\aleph_0}{2}\frac{\Omega}{\pi}Sa(\Omega(t-s))\phi(s)ds = \frac{\aleph_0}{2}\frac{\Omega}{\pi}\lambda_0\phi(t) = \lambda\phi(t).$$

O autovalor λ pode ser calculado em termos do autovalor λ_0 (normalizado) das funções "prolate-esferoidais". A série obtida tem coeficientes aleatórios x_n não correlacionados.

Séries de Fourier como mecanismo de Geração de Fractais Aleatórios

Apresenta-se com uma ilustração adicional, um método simples para a geração de uma aproximação de um espectro $1/f^{\beta}$ para o *Movimento Browniano Fracionário* com $1 \le \beta = 1 + 2H \le 3$. Para a geração de um sinal de comprimento $N+1$, seja o sinal discreto

$$x[n] := \sum_{j=1}^{N} A_j \cos\left(\frac{2\pi j(n-1)}{N}\right) + B_j sen\left(\frac{2\pi j(n-1)}{N}\right),\ 0 \le n \le N,$$

no qual os coeficientes de Fourier são aleatórios, determinados via duas variáveis aleatórias auxiliares:

$$\begin{cases} r_j := j^{\beta/2}.G \\ \theta_j := 2\pi.U \end{cases}$$

As amplitudes são controladas por uma v.a. normalizada gaussiana G e a fase com uma v.a. normalizada uniforme U.

Impondo, $0 \leq j \leq N$: $\begin{cases} A_j := r_j \cos\theta_j \\ B_j := r_j sen\theta_j \end{cases}$,

então $x[n]$ corresponde a um processo de movimento Browniano fracionário amostrado.

Tópicos especiais na análise de sinais

CAPÍTULO 5

5.1 SISTEMA DISCRETOS DE VOLTERRA E SÉRIES DE VOLTERRA

As Séries de Volterra constituem uma poderosa ferramenta, proposta pelo Matemático Italiano **Vito Volterra** em 1880, como uma generalização de séries de MacLaurin. Anos mais tarde, **Nobert Wiener** propôs o uso destas séries para modelar sistemas não-lineares. Desde então, os sistemas de Volterra vêm sendo extensivamente usados na análise e modelagem de sistemas não-lineares.


Vito Volterra (1860-1940).

Um modelo de filtro linear bastante usado é o filtro transversal de Wiener[36], o qual constitui um dispositivo bastante flexível. É composto por uma linha de retardo com derivações, as quais sofrem ganhos ajustáveis para gerar a saída. A conveniência destes filtros é que os ganhos (dos *taps*) são alterados facilmente, modificando a função de transferência implementada. Isto não acontece com filtros constituídos por elementos localizados. Na verdade, estes foram os antepassados dos *filtros digitais* introduzidos em Engenharia Elétrica (possuem topologia idêntica)! Eles constituem um dos modelos mais freqüentes para filtros

[36] O filtro transversal foi uma idéia patenteada em **1931** por N. Wiener e Y.W. Lee do MIT (Massachusetts Institute of Technology). **Nobert Wiener** (1894-1964) fantástico cientista Norte-americano, criador, entre numerosas contribuições relevantes, da Cibernética – Ciência dedicada ao estudo do controle e comunicação nos animais e máquinas.

lineares variantes no tempo, simplesmente introduzindo coeficientes c_i's dependentes do tempo. Esta possibilidade do ajuste dinâmico dos coeficientes foi introduzida por **C.E. Shannon** em 1950. Em 1964, foi usada por **R.W. Lucky** no primeiro equalizador automático para correção da dispersão de pulsos.

Um exemplo de um filtro transversal com três derivações é apresentado a seguir, em que c_{-1}, c_0, c_1 são os ganhos ajustáveis e Δ é o atraso introduzido em cada estágio.

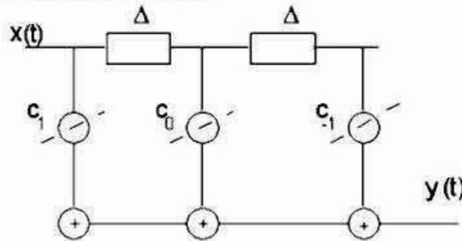


Figura 5.1 Filtro de Wiener com três derivações (equivale a FIR 3-*taps*).

Neste caso, a saída é $y(t) = c_{-1}x(t)+c_0x(t-\Delta)+c_1x(t-2\Delta)$ e a função de transferência implementada pelo filtro é $H(w) = (c_{-1}e^{jw\Delta} + c_0 + c_1e^{-jw\Delta})e^{-jw\Delta}$.

No caso geral, para um linha constituída de $2M$ retardos (e portanto $2M+1$ derivações), tem-se $H(w) = (\sum_{m=-M}^{M} c_m\, e^{-jwm\Delta})\; e^{-jw\Delta}$ que tem a forma de uma Série de Fourier com fundamental em $1/\Delta$.

Após haver proposto o filtro transversal (linha de retardo com derivações), **Wiener** sugeriu modelar a não-linearidade de um sistema como um modelo linear [GAB&ROB 1987], seguido de uma função não-linear em cascata (vide figura a seguir).

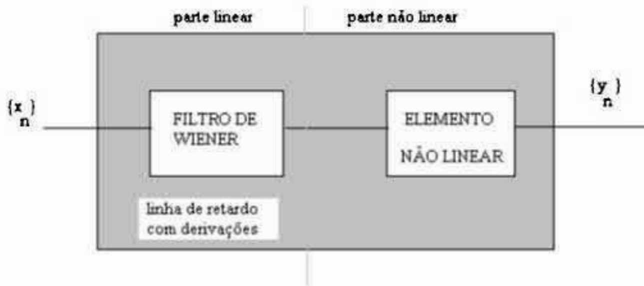


Figura 5.2 Modelo de Sistema não linear Invariante: Proposta de Wiener.

Considere um sistema invariante e não linear, com memória L, de forma que a saída y_n para uma seqüência de entrada $\{\ldots x_{n-3}\ x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n\}$ depende somente das L entradas precedentes, isto é, o sistema é descrito por um mapeamento não linear S

$$y_n = S\left(x_{n-L}\ x_{n-L+1}\ x_{n-1}\ x_n\right).$$

Supondo que S é suficientemente regular em torno da origem, Volterra propôs a representação:

<u>Série de Volterra.</u>

$$y_n = h^{(0)} + \sum_{i=0}^{L} h_i^{(1)} x_{n-i} + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L} h_{ij}^{(2)} x_{n-i} x_{n-j} + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{L} h_{ijk}^{(3)} x_{n-i} x_{n-j} x_{n-k} + \ldots$$



A série é caracterizada pelos "coeficientes" de Volterra:

$$h^{(0)}\ h_i^{(1)}\ h_{ij}^{(2)}\ h_{ijk}^{(3)}\ \ldots\ i,j,k,l,\ldots \in \{0,1,\ldots,L\}.$$

As séries de Volterra podem, portanto, ser interpretadas como um tipo de "Série de Taylor com memória". A convergência em geral é lenta e problemática e a complexidade no cálculo dos coeficientes $h^{(k)}$ cresce rapidamente com k.

Os sistema contínuos de Volterra são descritos de modo bastante análogo. Considerando a representação contínua, tem-se

$$y(t) = h_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1,\tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \ldots$$

<u>Exemplo 1</u>.
Considere o sistema não linear obtido pelo cascateamento de um filtro invariante (LIT) $\{h_n\}$ com uma não-linearidade expressa pela relação de entrada-saída $y_n = g(w_n)$; g analítica. (w_n corresponde à saída do sistema LIT, vide figura que segue).

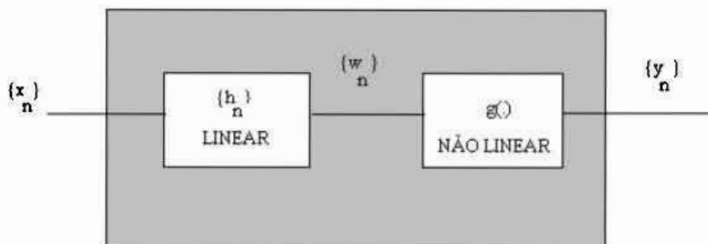


Figura 5.3 Exemplo de um modelo de sistema não linear.

Em torno da origem, pode-se empregar uma expansão do tipo $g(w) \cong \sum_{i=0}^{\infty} g_l w^l$. Note que se $g(.)$ é um polinômio de grau gr[$g(x)$]≤k, então $g_l=0$ $\forall l>k$. A característica do sistema não linear é dada por $y_n = g\left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i x_{n-i}\right)$, resultando em:

$$y_n \cong g_0 + g_1 \sum_{i=0}^{L} h_i x_{n-i} + g_2 \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=0}^{L} h_i h_j x_{n-i} x_{n-j} + \dots.$$

Deste modo, os coeficientes de Volterra para este sistema particular são dados por:

$$h^{(0)} = g_0; \quad h_i^{(1)} = g_1 h_i; \quad h_{ij}^{(2)} = g_2 h_i h_j; \ \dots$$

Mesmo sendo extremamente preliminar, este preâmbulo visa ilustrar o potencial dos sistemas lineares e dos filtros transversais na modelagem de sistemas.

5.2 TRANSFORMADAS DISCRETAS DE FOURIER EM CORPOS FINITOS

Transformadas Digitais (termo cunhado por **de Oliveira**) têm aplicações em contextos tais como codificação de canal, criptografia e processamento digital de sinais. Duas transformadas de Fourier bem estabelecidas na literatura são consideradas, a saber, a transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) e a transformada de Fourier de corpo finito (TFCF). Novas versões de corpo finito para a TFTD e TFCF foram

introduzidas por **R. Campello de Souza**, **H. de Oliveira**, **Márcia Mahon Campello** [CAM *et al.* 1988].

Vide **http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry_in_Galois_fields**

Números Complexos em Corpos finitos

O conjunto Ga(p) dos inteiros gaussianos sobre GF(p), definido a seguir, desempenha um papel importante nas idéias abordadas aqui. O símbolo := denota *igual por definição*; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os conjuntos dos números racionais, reais e complexos, respectivamente.

Definição: $Ga(p):=\{a + jb,\ a,\ b \in GF(p)\}$, p um primo ímpar tal que $j^2\equiv-1$ (mod p) não é um resíduo quadrático em GF(p) (i.e., $p \equiv 3$ (*mod* 4)), é o conjunto dos inteiros gaussianos sobre GF(p), doravante denominados inteiros galoisianos.

Denotando por ⊗ o produto cartesiano, pode ser mostrado que o conjunto Ga(p), munido das operações ⊕ e ∗, definidas a seguir, é um corpo finito [BLAH 1985], [BUR 1977]. Sejam

$\oplus : Ga(p) \otimes Ga(p) \rightarrow Ga(p)$

$(a_1+jb_1,\ a_2+jb_2) \rightarrow (a_1+jb_1) \oplus (a_2+jb_2) =$

$=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2),$

e

$* : Ga(p) \otimes Ga(p) \rightarrow Ga(p)$

$(a_1+jb_1,\ a_2+jb_2) \rightarrow (a_1+jb_1) * (a_2+jb_2) =$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2+a_2b_1).$

Proposição: A estrutura $GL(p):= \langle Ga(p),\ \oplus,\ *\rangle$ é um corpo finito isomórfico a $GF(p^2)$. ■

Por analogia com os números complexos, os elementos de GF(p) e de GL(p) são ditos ser reais e complexos, respectivamente.



Évariste Galois (1811-1832). Teoria dos corpos finitos. Vide biografia em http://www2.ee.ufpe.br/codec/Galois.html

Proposição: Os elementos $\zeta=(a+jb)\in$ GL(p) satisfazem $\zeta^{p+1} \equiv |\zeta|^2 \equiv a^2+b^2 (\text{mod } p)$.

Prova: Tem-se $\zeta^p = (a+jb)^p \equiv a^p + j^p b^p (\text{mod } p)$, uma vez que GL($p$) é isomórfico a GF($p^2$), um campo de característica p. Desde que p=4k+3, $j^p = -j$, de modo que $\zeta^p \equiv a - jb (mod\ p) = \zeta^* (mod\ \text{p})$, em que ζ^* denota o complexo conjugado de ζ. Portanto, $\zeta^{p+1} \equiv \zeta\zeta^* = |\zeta|^2 \equiv a^2 + b^2 \ (\text{mod } p)$. ■

Definição: O conjunto unimodular de GL(p), denotado por G_1, é o conjunto dos elementos $\zeta=(a+jb)\in$ GL(p), que satisfazem $a^2+b^2 \equiv 1\ (mod\ p)$.

Proposição: A estrutura <G_1, *> é um grupo cíclico de ordem ($p+1$).

Prova: G_1 é fechado com relação à multiplicação. Por outro lado, sabe-se que o conjunto dos elementos não nulos de GF(p^2), juntamente com a operação de multiplicação do corpo, é um grupo cíclico de ordem (p^2-1) (denotado aqui por G) [LIDL&NIE 1986]. Portanto, G_1 é um subgrupo cíclico de G e, da proposição 2, tem ordem $p+1$. ■

Para determinar os elementos do grupo unimodular, observa-se que, se $\zeta = a+jb$ é um tal elemento, então os elementos do conjunto Γ={$b+ja$, $(p-a)+jb$, $b+j(p-a)$, $a+j(p-b)$, $(p-b)+ja$, $(p-a)+j(p-b)$, $(p-b)+j(p-a)$} também pertencem a G_1.

Exemplo 2:

Grupo unimodular de GF(11^2). A Tabela I.5 lista os elementos do subgrupo G_1 of ordem 12, e suas ordens [http://www2.ee.ufpe.Br/codec/Fftools.html].

TABELA I.5 ELEMENTOS DE G_1.

ζ ∈ ∈ GL(11)	1	-1	5+j3, 5+j8	j, -j	6+j8, 6+j3	8+j6, 8+j5, 3+j6, 3+j5
Ordem	1	2	3	4	6	12

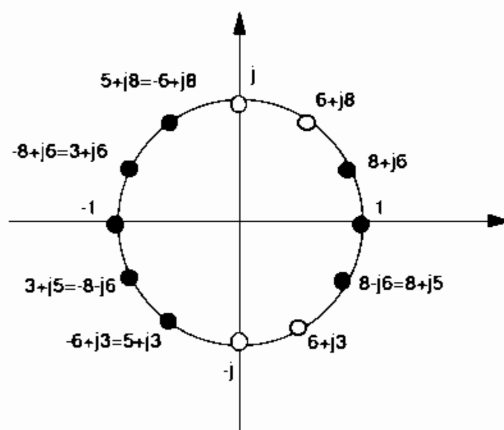


Figura 5.4 Raízes da unidade em GF(11^2) expressas como elementos de GL(11).

A figura 5.4 ilustra as 12 raízes da unidade em GF(11^2). G_1 é isomórfico a C_{12}, o grupo das rotações planares de um dodecaedro regular. O elemento $\zeta = 8+j6$, correspondente a uma rotação anti-horária de $2\pi/12 = 30^0$, é um gerador. Na figura, símbolos de mesma cor indicam elementos de mesma ordem, os quais ocorrem em pares complexos conjugados ■

FORMA POLAR PARA INTEIROS GALOISIANOS
http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry_in_Galois_fields

Na definição de GL(p), os elementos foram escritos na forma retangular $\zeta=(a+jb)$. Uma outra representação para os elementos do grupo multiplicativo de GL(p) é proposta a seguir, a qual possibilita escrevê-los na forma $r\varepsilon^{\theta}$. Por analogia ao *continuum*, essa forma é denominada polar.

Proposição: Sejam G_A e G_B subgrupos, do grupo multiplicativo G_C dos elementos não nulos de GL(p), de ordens, respectivamente, $N_A=(p-1)/2$ e $N_B=2(p+1)$. Então todos os elementos de GL(p) podem ser escritos na forma $\zeta = \alpha\beta$, em que $A\in G_A$ e $B\in G_B$.
Prova: Como G_C é um grupo cíclico e ambos, N_A e N_B, são divisores de p^2-1, então os subgrupos G_A e G_B of GL(p) existem e são cíclicos. O produto direto ($G_A \otimes G_B$) [LIDL&NIE 1986] tem ordem $|(G_A \otimes G_B)| = N_A N_B = p^2-1$. Portanto, ($G_A \otimes G_B$) é o grupo multiplicativo de GL(p), e todo elemento de GF(p) pode ser escrito na forma $\zeta=\alpha\beta$, $\alpha\in G_A$, $\beta\in G_B$. ■

Considerando que qualquer elemento de um grupo cíclico pode ser escrito como uma *potência* inteira (aqui, sem perda de generalidade, usa-se a terminologia adequada para grupos multiplicativos) de um gerador do grupo, é possível fazer $\alpha = r$ e $\beta = \varepsilon^\theta$, em que ε é um gerador de G_B. As potências ε^θ desse elemento desempenham um papel análogo ao de $e^{j\theta}$ sobre o corpo dos complexos. Assim, a representação polar assume a forma desejada, $\zeta = r\varepsilon^\theta$.

No texto apresentado até esse ponto, r representa o módulo de ζ. Torna-se necessário, portanto, definir o conceito de módulo de um elemento em um corpo finito. Considerando os elementos de GF(p), sabe-se que metade deles é de resíduos quadráticos de p [BUR 1997]. Os demais elementos, que não possuem raiz quadrada, são os resíduos não quadráticos. De maneira análoga, no corpo ***R*** dos reais, os elementos são divididos em positivos e negativos, os quais são, respectivamente, aqueles que possuem e que não possuem raiz quadrada. A operação usual de módulo em ***R*** sempre produz um resultado positivo. Por analogia, a operação de módulo em GF(p), definida a seguir, é tal que sempre resulta em um resíduo quadrático de p.

Definição: O módulo de um elemento $a \in$ GF(p), com $p=4k+3$, é dado por

$$|a| := \begin{cases} a, & se \;\; a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \\ -a, & se \;\; a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}. \end{cases}$$

Proposição: O módulo de um elemento de GF(p) é um resíduo quadrático de p (escreve-se $|a|$RQp).

Prova: Desde que $p=4k+3$, segue-se $(p-1)/2=2k+1$, de modo que $(-1)^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$. Pelo critério de Euler [BUR 1997], se $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$, então a é um resíduo quadrático de p; se $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$, então a é um resíduo não quadrático de p. Portanto, $(-a)^{(p-1)/2} \equiv (-1)(-1) \equiv 1 \pmod{p}$, e segue-se que a é um resíduo quadrático de p. ■

Definição: O módulo de um elemento $a+jb \in$ GL(p), em que $p=4k+3$, é dado por $|a+jb| := \left|\sqrt{|a^2+b^2|}\right|$.

Nesta definição, o sinal de módulo interno é necessário para permitir o cálculo da raiz quadrada da norma quadrática a^2+b^2. No *continuum*, tal expressão reduz-se à norma usual de um número complexo.

As definições a seguir introduzem os grupos cíclicos dos módulos e das fases de GL(p), estabelecendo uma terminologia mais apropriada para se lidar com a representação polar.

Definição: O grupo dos módulos de GL(p), denotado por G_r, é o subgrupo de ordem $(p-1)/2$ de GL(p).

Definição: O grupo das fases de GL(p), denotado por G_θ é o subgrupo de ordem $2(p+1)$ de GL(p).

Proposição: Se $\zeta = a+jb = r\varepsilon^\theta$, em que $r \in G_r$ *e* $\varepsilon^\theta \in G_\theta$, então $r=|\zeta|$.

Prova: Os elementos de G_r tem ordens que dividem $(p-1)/2$. Assim, se $r \in G_r$, então $r^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$, e $|r|=r$. Além disso, os elementos do grupo G_θ tem ordens que dividem $2(p+1)$ e, portanto, da proposição 2, são aqueles $a+jb$ que satisfazem $\zeta^{2(p+1)} \equiv (a^2+b^2)^2 \equiv 1 \pmod p$, ou seja, $a^2+b^2 \equiv \pm 1 \ (mod\ p)$. Portanto, pela definição de unimodular, tais elementos tem módulo igual a 1, ou seja, $|\zeta|=|r\varepsilon^\theta|=|r||\varepsilon^\theta|=r1=r$. ■

Das definições anteriores pode ser observado que a representação polar introduzida é consistente com a forma polar usual empregada para representar números complexos. O módulo pertence à GF(p) (o módulo é real) e é um resíduo quadrático (um número positivo), e a componente exponencial ε^θ tem módulo unitário e pertence à GL(p) ($e^{j\theta}$ tem módulo unitário e pertence ao corpo dos complexos).

SÉRIES INFINITAS SOBRE CORPOS FINITOS

Dada uma seqüência de inteiros $\{x[n]\}_{-\infty}^{\infty}$, é possível gerar uma seqüência sobre GF(p) simplesmente considerando $\{x[n] \pmod p\}_{-\infty}^{\infty}$. Em geral, $x[n]$ pode ser uma seqüência de números racionais, pois qualquer elemento $r/s \in \mathbb{Q}$ pode ser mapeado sobre GF(p), assumindo valores $[r\ (mod\ p)].[s\ (mod\ p)]^{-1}$. Nesse trabalho são consideradas seqüências finitas, e infinitas periódicas sobre um corpo finito.

Definição: Uma seqüência infinita de elementos de GF(p) é dita ser periódica de período P, se satisfaz $x[n] = x[n(mod\ P)]$.

Definição: Uma seqüência $x[n]$ infinita, de elementos de GF(p), que é nula para $n<N_1<\infty$ ($n>N_2>-\infty$) e satisfaz a condição da definição anterior, é dita ser periódica à direita (respectivamente, periódica à esquerda).

Sejam, por exemplo, as seguintes seqüências de elementos de GF(7):

Exemplo 3:

Seja $\{x[n]\}_{-\infty}^{\infty}$, $x[n]\in$ GF(p), e.g.,

i) $\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$ (em GF(7)) = {1 3 2 6 4 5 1 3 2 6 4 5 ...} (P=6).

ii) $\{1^n\}_{n=0}^{\infty}$ (em GF(5)) = {1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...} (P=1).

iii) $\{x[n]\}_{-\infty}^{\infty}$ (em GF(3)) = {...0 0 0 1 1 1 2 2 2 0 0 0 ...}(P=9). ■

É possível definir uma Transformada de Fourier de Tempo Discreto para essas seqüências, por $X(\varepsilon^{\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\varepsilon^{-n\theta}$, $\varepsilon\in$ GL(p)? Essa série é convergente? É um fato bem conhecido que a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ =1-1+1 -1 +1 ... diverge no sentido clássico. Entretanto, Euler e outros observaram que a média aritmética das somas parciais converge para 1/2. As somas parciais dessa série são S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0 ... e a média aritmética $\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$ forma uma seqüência (σ_n) que converge para 1/2 . Quando uma série converge no sentido de que a média aritmética das somas parciais converge, a mesma é dita ser Cesàro-somável (**Ernesto Cesàro** (1859-1906)) [FIGU 1977]. Toda série convergente no sentido usual é Cesáro-somável e sua soma é igual ao limite da seqüência de médias aritméticas das somas parciais. Isto significa que o conceito de Cesàro somabilidade é útil, uma vez que pode tornar séries divergentes, somáveis. Um novo critério de convergência, adequado para séries sobre corpos finitos, derivado da somabilidde Cesàro, é introduzido a seguir. Dado $\{x[n]\}_1^{\infty}$, as somas parciais $S[n]$ são definidas por : $S[n] := \sum_{k=1}^{n} x[k]$.

Definição: A soma Cesàro sobre um corpo finito é definida por $\sigma_n := \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S[k]\right)$, em que $S[k]\in$ GF(p) são interpretados como inteiros.

Se $\{x[n]\}_1^{\infty}$ é uma seqüência periódica sobre GF(p), então a seqüência $\{S[n]\}_1^{\infty}$ também o é. Denotando por P o período dessa última seqüência, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S[k]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor n/P\rfloor P}S[k]\right)+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n+1-n(\bmod P)}^{n}S[k]\right).$$

O segundo termo, que existe apenas se P não divide n, é nulo e $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n/P\rfloor}{n}\left(\sum_{k=1}^{P}S[k]\right)$. Mas $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n/P\rfloor}{n}=\frac{1}{P}$, de modo que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S[k]\right)=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}S[k]$ e assim $\left(\lim_{n\to\infty}\sigma_n\right)(\bmod p)\equiv\frac{1}{P(\bmod p)}\sum_{k=1}^{P}S[k](\bmod p)$.

O ponto a observar aqui é que primeiro toma-se o limite $n\to\infty$, e então se avalia o resultado reduzindo-o módulo p.

Definição: Uma série sobre um corpo finito é dita ser Cesàro convergente a σ, se e só se

$$\sigma:=\left(\lim_{n\to\infty}\sigma_n\right)(\bmod p)\in \mathrm{GF}(p).$$

Corolário: Toda série periódica sobre um corpo finito, com período $P\neq 0$ (*mod p*), é Cesàro convergente.

Exemplo 4:

Considerando a seqüência $\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$ do exemplo 2, tem-se $\{S[k]\}=\{1\ 4\ 6\ 5\ 2\ 0\ 1\ 4\ 6\ 5\ 2\ 0\ 1\ 4\ \ldots\}$, P=6 (*mod* 7).

Portanto, a série converge, no sentido Cesàro, para $\sigma=\frac{1}{6}(1+4+6+5+2+0)=3(mod\ 7)$. ■

A Transformada de Fourier de Tempo Discreto de uma Seqüência em GF(p)

As transformadas consideradas aqui lidam com seqüências x[n],$-\infty<n<\infty$, definidas sobre o corpo finito GF(p), as quais são obtidas das seqüências básicas δ[n], u[n], Aa^n:

i) O impulso de corpo finito em GF(p) (impulso de Galois), denotado por δ[n], é a seqüência x[n] definida por

$$x[n]=\delta[n]:=\begin{cases}1, & n\equiv 0\ (\bmod\ 2(p+1))\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Analogamente ao que acontece com seqüências reais, uma seqüência $x[n]$ definida em um corpo finito pode ser expressa como uma soma de impulsos de Galois deslocados e escalonados.

ii) O degrau unitário de corpo finito é dado por:

$$x[n] = u[n] := \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

iii) A seqüência exponencial de corpo finito é $x[n]=A(a)^n$, A e $a \in GF(p)$. Essa seqüência é periódica com período P, o qual é a ordem multiplicativa de a (mod p).

<u>**Definição**</u>: A Transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de uma seqüência $x[n]$ sobre $GF(p)$ é a função, definida em $GL(p)$, dada por

$$X(\varepsilon^{\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \varepsilon^{-n\theta},$$

em que $\varepsilon \in G_{\theta}$ tem ordem multiplicativa $2(p+1)$.

Na série infinita da definição anterior, a convergência é considerada no sentido *Cesàro*.

<u>**Exemplo 5**</u>:

Seqüência exponencial à direita sobre $GF(p)$. Seja $x[n]=a^n u[n]$, $a \in GF(p)$. Nesse caso, desde que $x[n]$ é não nulo apenas para $n \geq 0$, então

$$X(\varepsilon^{\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] \varepsilon^{-n\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\varepsilon^{-\theta})^n .$$

Computando as somas parciais:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + a\varepsilon^{-\theta}$

$S_3 = 1 + a\varepsilon^{-\theta} + (a\varepsilon^{-\theta})^2$

....

$S_{N-1} = 1 + a\varepsilon^{-\theta} + (a\varepsilon^{-\theta})^2 + (a\varepsilon^{-\theta})^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a\varepsilon^{-\theta})^{N-2}$

$S_N = 1 + a\varepsilon^{-\theta} + (a\varepsilon^{-\theta})^2 + (a\varepsilon^{-\theta}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a\varepsilon^{-\theta})^{N-2} + (a\varepsilon^{-\theta})^{N-1}$.

Denotando por N a ordem multiplicativa de $(a\varepsilon^{-\theta})$, o período da seqüência $S[k]$ é exatamente N. Portanto, é possível escrever $\sigma_N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(N-i)(a\varepsilon^{-\theta})^i$ que é igual a $\sigma_N = \frac{(a\varepsilon^{-\theta})^N - 1}{a\varepsilon^{-\theta} - 1} - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i(a\varepsilon^{-\theta})^i$.

Desde que $(a\varepsilon^{-\theta})$ tem ordem multiplicativa N, $\sigma_N = -\frac{\varepsilon^\theta}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i a^i \varepsilon^{\theta(-i-1)}$, que é o mesmo que $\sigma_N = \frac{\varepsilon^\theta}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{d}{d\varepsilon^\theta}(a^i(\varepsilon^\theta)^{-i})$, ou $\sigma_N = \frac{\varepsilon^\theta}{N}\frac{d}{d\varepsilon^\theta}(\sum_{i=0}^{N-1}(a\varepsilon^{-\theta})^i)$. Uma manipulação simples mostra que a última expressão é igual a $\sigma_N = \frac{1}{1-a\varepsilon^{-\theta}}$, que é a TFTDCF $X(\varepsilon^\theta)$. ■

A TFTDCF Inversa

Lema: Se $\varepsilon \in G_\theta$ tem ordem multiplicativa $2(p+1)$, então $\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1} \varepsilon^{\theta k} = \begin{cases} 2(p+1), \text{ se } k \equiv 0 \pmod{2(p+1)} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$.

Prova: Para $k \equiv 0 \pmod{2(p+1)}$, a soma é claramente igual a $2(p+1)$. Caso contrário, $\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1} \varepsilon^{\theta k} = \frac{1-\varepsilon^{k2(p+1)}}{1-\varepsilon^k}$ e o resultado segue. ■

Teorema: (A fórmula de inversão) A transformada de Fourier de tempo discreto de corpo finito inversa é dada por

$$x[n] = \frac{1}{2(p+1)}\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1} X(\varepsilon^\theta)\varepsilon^{\theta n}.$$

Prova: Por definição $X(\varepsilon^\theta) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\varepsilon^{-k\theta}$. Multiplicando ambos os lados por $\varepsilon^{n\theta}$ e somando em θ, obtém-se

$$\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1} X(\varepsilon^\theta)\varepsilon^{\theta n} = \sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\varepsilon^{-k\theta})\varepsilon^{\theta n}.$$

Mudando a ordem dos somatórios, o lado direito (LD) da expressão acima se torna $LD = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1}\varepsilon^{\theta(n-k)})$. Mas, do lema anterior, o somatório interno é não nulo apenas para $k=n$, de modo que $LD = 2(p+1)x[n]$ e o resultado segue. ■

É interessante observar que, embora a TFTDCF direta envolva um somatório infinito, de modo a ser capaz de lidar com seqüências

infinitas, sua inversa requer apenas uma soma finita sobre o grupo das fases G_θ. A transformada de Fourier de tempo discreto de corpo finito introduzida nesse trabalho satisfaz a maioria das propriedades da TFTD usual definida sobre os números complexos, tais como linearidade, deslocamento no tempo, escalonamento e assim por diante.

Exemplo 6:

A TFTDCF inversa do espectro plano $X(\varepsilon^\theta)=1$ é $x[n]=\frac{1}{2(p+1)}\sum_{\theta=0}^{2(p+1)-1}\varepsilon^{\theta n}$,

e, do lema anterior, segue-se $x[n]=\delta[n]$, como esperado. ■

Redefinindo a Transformada de Fourier de Corpo Finito

Sendo de fundamental importância em Processamento de Sinais, bem como na análise de Sistemas de Comunicações, a transformada discreta de Fourier (TDF) é uma ferramenta constantemente utilizada em Engenharia Elétrica. Suas aplicações se destacam, por exemplo, no cálculo eficiente de convoluções, na obtenção da resposta em freqüência de sistemas, na análise espectral de sinais, entre diversas outras. De uma maneira geral, a TDF de uma seqüência $v = (v_i) \in$ E, é a seqüência $V = (V_k) \in$ F de elementos

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} v_i W^{ik},$$

em que $i,k = 0, 1, ..., N-1$ e W é uma raiz N-ésima da unidade em F.

Se E é o corpo dos reais $\boldsymbol{R}$ (ou dos complexos $\boldsymbol{C}$) e F=$\boldsymbol{C}$ então, $W = e^{-j2\pi/N}$ e tem-se a TDF usual (ou DFT – *Discrete Fourier Transform*). Se E=GF(p) e F=GF(p^m), com m>1, então $W=\alpha$ é um elemento de ordem N de GF(p^m). Neste caso, tem-se a transformada de Fourier de corpo finito (TFCF). Se E=F=GF(p) (ou seja, m=1), a TFCF é chamada de transformada numérica (TN). Essas transformadas apresentam aspectos atraentes, tais como baixa complexidade computacional e simplicidade de implementação. Em qualquer caso, a definição da TFCF com um núcleo $W=\alpha\in$ GF(p^m), a torna uma transformada *real*, no sentido da proposição 1. Portanto, uma definição da TFCF análoga à TDF, deve usar um núcleo *complexo*. Nesse caso tem-se não apenas uma definição mais apropriada para a TFCF, mas também uma transformada com maior flexibilidade em relação à escolha de seu comprimento N, como mostrado a seguir.

Definição: Seja $f=(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ um vetor de comprimento N e componentes em GF(q), em que $q=p^r$. O vetor $F=(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$, com componentes em GL($q^m$) dadas por

$$F_k := \sum_{i=0}^{N-1} f_i \zeta^{ki},$$

em que ζ é um elemento de ordem N em GL(q^m), é a Transformada Discreta de Fourier em um Corpo Finito (TDFCF) de f.

A TDFCF apresenta as mesmas propriedades que a TFCF introduzida por **J. Pollard** [POLL 1971]. De fato essa última passa a ser um caso particular quando $\zeta = a + jb$ é tal que $b = 0$.

Proposição: A transformada discreta de Fourier de corpo finito tem comprimentos N que são divisores de $q^{2m}-1$.

Prova: A transformada tem comprimento N, dado pela ordem do elemento $\zeta \in$ GL(q^m). Como $|GL(q^m)| = q^{2m}-1$, o resultado segue. ■

Observe que, como $q^{2m}-1=(q^m-1)(q^m+1)$, além dos comprimentos divisores de q^m-1, obtidos na transformada de **Pollard**, novos comprimentos divisores de q^m+1 são agora possíveis. Esta nova formulação para a transformada de Fourier de corpo finito pode ser considerada mais adequada, por conter um núcleo complexo. Adicionalmente, a nova definição permite uma maior flexibilidade na escolha de comprimentos para a transformada. Definidas sobre um corpo finito, as transformadas discretas passam a constituir verdadeiras "Transformadas Digitais". Em particular, estas transformadas têm aplicação em sistemas de comunicações com acesso múltiplo [deO *et al.* 1999].

Por Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur
URL: http://www2.ufpe.br/codec/deOliveira.html

BRASÃO dos OLIVEIRA


Magalhães


Oliveira (moderno)

APÊNDICE A

UMA SINOPSE SOBRE A TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

Visando exclusivamente ilustrar o formalismo envolvido na teoria de L. Schwarz, esse apêndice delineia um brevíssimo sumário de alguns conceitos e propriedades corriqueiras da teoria das distribuições.

Definição (Espaço C^∞). O espaço de sinais complexos $f:\mathbb{R}\to C$ infinitamente diferenciáveis é denotado C^∞, i.e. o espaço vetorial tal que $\forall f\in C^\infty \Rightarrow (\forall n\in \mathbb{N})\, f^{(n)}\in C^\infty$.

Definição (Suporte de um sinal). O suporte de um sinal complexo $f:\mathbb{R}\to C$, *supp f*, é o fecho do conjunto $t\in\mathbb{R} \mid f(t)\neq 0$. Formalmente, $\text{supp } f := \overline{\{t\in R \mid f(t)\neq 0\}}$.

O conjunto de interesse para a definição das distribuições é o conjunto D.

Definição (Espaço D). Seja D o espaço vetorial de sinais complexos $\varphi:\mathbb{R}\to C$ infinitamente derivável C^∞ de suporte limitado.

Corolário. Todo sinal $\varphi\in D$ admite série de Taylor convergente em todo o suporte, i.e.

$\forall\, t_0 \in \textit{Supp}\, \varphi,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ é convergente.

ESPAÇO VETORIAL D.

D é um espaço vetorial sobre os complexos, com dimensão infinita.

Convergência no espaço D.

Uma seqüência $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\varphi_n\in D$, converge para um sinal $\varphi\in D$ se e só se:

i) $\exists\, K\subset\mathbb{R}$, compacto| $\textit{Supp}\, \varphi_n \subset K$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ii) A seqüência de k-ésimas derivadas $\{\varphi_n^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ converge uniformemente para $\varphi^{(k)}$.

Proposição. Se $\varphi_1 \in$ D e $\varphi_2 \in C^\infty$, então $\varphi_1 .\varphi_2 \in$ D.

Distribuições.
Uma distribuição é um funcional linear contínuo sobre D, definido por uma regra de atribuição

$$\begin{aligned} T &: D \to C \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}.$$

Usualmente $T(\varphi) = <\varphi, T>$ é definido via um produto interno, sendo portanto um operador linear.

Linearidade das distribuições.
$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$; $\forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in C$, tem-se $T(c_1\ \varphi_1 + c_2\ \varphi_2) = c_1\ T(\varphi_1) + c_2\ T(\varphi_2)$.

Notação: Seja D' o espaço de todas as distribuições.

Propriedade.
Se $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\varphi_n \in$ D converge para $\varphi \in$ D, então $\{<\varphi_n, T>\}_{n=0}^{+\infty}$ converge para $<\varphi, T>$.

Denota-se: Se $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi \Rightarrow \lim_{n \to \infty} <\varphi_n, T> = <\varphi, T>$.

Definição: Distribuição de Dirac.
$\forall \varphi \in$ D, $<\varphi, \delta> = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t)dt := \varphi(0)$.

A distribuição de Dirac deslocada a um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ é definida por

$$\forall \varphi \in \text{D},\ <\varphi, \delta_{(t_0)}> := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta_{(t_0)}(t)dt := \varphi(t_0).$$

Distribuições T_f.
São distribuições geradas (associadas) a sinais $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então f define uma distribuição T_f dada por:

$$\forall \varphi \in \text{D},\ <\varphi, T_f> := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f^*(t)dt.$$

Teorema. Dois sinais f e g definem a mesma distribuição se e só se $f =_{p.p} g$, isto é, $T_f = T_g \Leftrightarrow f =_{p.p} g$.

Outra distribuição extremamente importante é:

Distribuição Valor principal de Cauchy (VPC).

$$\forall\varphi\in \mathrm{D},\ <\varphi, vp\frac{1}{t}>:= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon}\varphi(t)\frac{1}{t}dt = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}dt\,.$$

Denota-se por $vp\frac{1}{t}$.

Proposição.

A distribuição vpc está bem definida e o limite existe $\forall\varphi\in$ D.

<u>Prova</u>.

Dado $\varphi\in$ D, seja *supp* $\varphi\subset[-L,L]$. Então

$$\int_{|t|>\varepsilon}\varphi(t)\frac{1}{t}dt = \int_{-L}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{L}\frac{\varphi(t)}{t}dt\,.$$

Daí segue que $\int_{|t|>\varepsilon}\varphi(t)\frac{1}{t}dt = \int_{-L}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{L}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt$, pois

$$-\varphi(0)\int_{-L}^{-\varepsilon}\frac{dt}{t} = -\varphi(0)\int_{L}^{\varepsilon}\frac{dt'}{t'} = \varphi(0)\int_{\varepsilon}^{L}\frac{dt}{t}\,.$$

O intervalo de integração suprimido na reta real corresponde a $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}dt$, no qual, para $\varepsilon\to 0$, a integral tende a zero uma vez que $\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \varphi'(0)$. Então $<\varphi, vp\frac{1}{t}> = \int_{-L}^{+L}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt$.

Caracterização de Distribuições (Condições de necessidade e suficiência).

Mostra-se que para T seja uma distribuição é necessário e suficiente que: $\forall \mathrm{K}\subset \boldsymbol{R}$ compacto, $\exists\, M$ (constante positiva) e um inteiro n tal que

$$\forall\varphi\in \mathrm{D}\quad |<\varphi,T>| \le M.\,\mathrm{P}_{\mathrm{K},n}(\varphi).$$

(N.B. M e n podem depender de K, mas não de φ).

Derivadas de distribuições T_f podem ser definidas, levando a uma maneira formal de calcular derivadas de distribuições.

Derivadas de Distribuições.

Se $f\in C^{\infty}$ é tal que T_f é distribuição, a distribuição derivada (T_f)' pode ser calculada em termos de T_f pondo

$$\forall\varphi\in \mathrm{D}\ <\varphi, T_f^{'}> = -<\varphi', T_f>\,.$$

Digressão. Em guisa de definição.

Uma maneira natural de associar a noção de derivada a uma distribuição é pondo $<\varphi,(T_f)'> = <\varphi,(T_{f'})>$. Segue-se daí que $\forall\varphi\in D$
$< \varphi, T_f' >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f'(t)dt$.

Integrando por partes colocando $u=\varphi$ e $v=f'(t)dt$
$< \varphi, T_f' >= \varphi(t) f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)dt$ e portanto $< \varphi, T_f' >= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) f(t)dt$.

Isso sugere definir, de um modo mais geral, $< \varphi, T' >=< \varphi', T >$.

Derivadas de ordem mais alta (ordem n).
Aplicando recorrência, a k-ésima derivada (k>0) de $T\in D'$, denotada $T^{(k)}$, é dada por:

$\forall\varphi\in D \quad < \varphi, T^{(k)} >= (-1)^k < \varphi^{(k)}, T >$.

Corolário.
Toda distribuição é infinitamente derivável.
(Estude o Doublet e outras derivadas envolvendo a Distribuição de Dirac).

Caso de sinais descontínuos.
Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, classe C^1 (derivável) nos intervalos abertos $(-\infty-,t_0)$ e $(t_0,+\infty)$, com descontinuidade de primeira ordem em t_0. Os limites a direita e a esquerda existem e são distintos:

$$f(t_0+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) \quad \text{e} \quad f(t_0-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t).$$

A salto na descontinuidade (*saltus*) é dado por $\Delta(f, t_0) := f(t_0+) - f(t_0-)$.

Dado $\varphi\in D$, seja *supp* $\varphi\subset [-L,L]$. Calculando-se a derivada da distribuição T_f:

$< \varphi, T_f' >= -< \varphi', T_f >= -\int_{-L}^{t_0} \varphi'(t) f(t)dt - \int_{t_0}^{L} \varphi'(t) f(t)dt$. Integrando-se por partes, obtém-se

$< \varphi, T_f' >= \varphi(t_0)\left[f(t_0+) - f(t_0-)\right] + \int_{-L}^{L} \varphi(t) f'(t)dt$ ou

$< \varphi, T_f' >= \varphi(t_0)\Delta(f, t_0) + < \varphi, T_{f'} >$.

Portanto, $(T_f)' = T_{f'} + \Delta(f, t_0).\delta_{(t_0)}$.

Multiplicação de distribuições.
Em geral, não se pode multiplicar duas distribuições. Mas se $T \in$ D' e $f \in C^\infty$, então o produto $f.T$ está bem definido e $\forall \varphi \in$ D $<\varphi, f.T> = <f.\varphi, T>$.

Translação e homotetia.

Translação. Se f: $\boldsymbol{R} \to$C é localmente integrável e $\varphi \in$ D, então
$$(\forall t_0) \quad \int_{\Re} f(t - t_0)\varphi(t)dt = \int_{\Re} f(t)\varphi(t + t_0)dt \,.$$
Considere o funcional $\begin{array}{ll} \tau_{t_0}: & D \to D \\ & \varphi \mapsto \varphi(. + t_0) \end{array}$, $\tau_{t_0} \in$ D.

A translação de uma distribuição $T \in$ D', $\tau_{t_0} T$, é definida por $<\varphi, \tau_{t_0} T> = <\tau_{-t_0}\varphi, T>$.

Homotetia. Seja Se f: $\boldsymbol{R} \to$C é localmente integrável e $\varphi \in$ D,
$$(\forall \lambda \in \boldsymbol{R} - \{0\}) \quad \int_{\Re} f(\lambda t)\varphi(t)dt = \int_{\Re} f(t)\varphi(\frac{t}{\lambda})\frac{dt}{|\lambda|}.$$
Sendo a homotetia $f_\lambda(t) := f(\lambda t)$, então a distribuição T_λ para cada $T \in$ D' é definida por $<\varphi, T_\lambda> = \frac{1}{|\lambda|} <\varphi_{1/\lambda}, T>$.

Exercício. Mostre que a distribuição $\delta_\lambda = \frac{1}{|\lambda|}\delta$ para $\lambda \neq 0$.

Sendo f: $\boldsymbol{R} \to$C, a homotetia f_{-1} define $f_{-1}(t) = f(-t)$.

Definição (Paridade de Distribuições). Distribuições pares e ímpares.

i) Uma distribuição $T \in$ D' é dita ser par se
$\forall \varphi \in$ D $T_{-1} = T$.

ii) Uma distribuição $T \in$ D' é dita ser ímpar se
$\forall \varphi \in$ D $T_{-1} = -T$.

Definição. Seja $\Omega \subset \boldsymbol{R}$ um conjunto aberto. Diz-se que a distribuição T é nula em Ω
se e só se $\forall \varphi \in$ D $<\varphi, T> = 0$.

Exercício. δ é nula em $\boldsymbol{R}$ -{0}, pois se $supp(\varphi) \subset \boldsymbol{R}$ -{0}, $<\varphi, \delta>=0$.

Se uma distribuição T é nula em conjuntos abertos Ω_i de uma família de conjuntos abertos $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ em que I é um conjunto de índices, então ela também é nula na união desses abertos, i.e., T é nula em $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$.

Como a união arbitrária de abertos é um conjunto aberto, então o complementar desse conjunto é um conjunto fechado.

Definição (Suporte de uma Distribuição). O suporte de uma distribuição T, denotado *supp T*, é o menor conjunto fechado no qual T é não nula.

Exemplos. $Supp\ \delta_{(t_0)}=\{t_0\}$; $Supp\ v.p.\frac{1}{t}=\boldsymbol{R}$.

Distribuições de suporte compacto.
Seja T uma distribuição cujo suporte é limitado, portanto compacto. Pode-se mostrar que T pode ser prolongada ao espaço D:=C$^\infty$($\boldsymbol{R}$). O conjunto das distribuições de suporte compacto é denotado por D'.

Topologia em D. Uma seqüência de sinais $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\varphi_n \in$ D converge para $\varphi \in$ D se

$\forall$K$\subset \boldsymbol{R}$, compacto; $\forall k>0$, inteiro, tem-se $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ uniformemente sobre K.

Teorema. O conjunto D' das distribuições de suporte compacto é idêntico ao conjunto das formas lineares sobre D.

Espaço C.
Um sinal f:$\boldsymbol{R} \to$C pertence ao espaço C se e somente se:

i) $\varphi \in$ C$^\infty$.

ii) $\forall k>0$, $h \geq 0$ inteiros, ($\forall t \in \Re$) $t^k \varphi^{(h)}(t) < +\infty$.

Se $\varphi \in$ C então $\forall k>0$, $h \geq 0$ inteiros, $\exists$ uma constante $M_{k,h}>0$ tal que $\forall t \in \boldsymbol{R}$, tem-se $\left|t^k \varphi^{(h)}(t)\right| \leq M_{k,h}$.

Assim, em $\varphi \in$ C, a função φ e todas suas derivadas decrescem, uma vez que são dominadas por $1/t$.

C é chamado de espaço vetorial das funções infinitamente deriváveis e de decrescimento rápido.

As seguintes relações de inclusão são válidas: D ⊂ C ⊂ D.

Espaço vetorial C

i) Se $\varphi_1, \varphi_2 \in$ C, $\forall c_1, c_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in$ C.
ii) Seja $\varphi \in$ C, P um polinômio e Q uma função racional sem pólos sobre $\boldsymbol{R}$, então $P\varphi \in$ C e $Q\varphi \in$ C.

Normas em C

Se $\varphi \in$ C então $\forall n \geq 0$ define-se $\|\varphi\|_n := \underset{k+h \leq n}{Max} \left\{ \underset{t \in \Re}{Sup} \left| t^k \varphi^{(h)}(t) \right| \right\}$.

Por exemplo:

$\|\varphi\|_0 := \left\{ \underset{t \in \Re}{Sup} |\varphi(t)| \right\}$ e $\|\varphi\|_1 := Max \left\{ \|\varphi\|_0, \underset{t \in \mathrm{R}}{Sup} |\varphi'(t)|, \underset{t \in \mathrm{R}}{Sup} |t\varphi(t)| \right\}$.

As aplicações $\|.\|_n$:D→D, $\varphi \mapsto \|\varphi\|_n$ são normas e a topologia sobre C é definida por esse conjunto de normas.

Espaço métrico C

Definindo a seguinte métrica d: C×C→$\boldsymbol{R}$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C} \quad d(\varphi_1, \varphi_2) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \partial_n(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ em que } \partial(\varphi) := \frac{\|\varphi\|_n}{1 + \|\varphi\|_n}.$$

A série é convergente e a métrica acima é invariante à translação.

Pode ser mostrado então que:

Teorema (espaço métrico).

O espaço vetorial C munido da distância d constitui um espaço métrico completo.

Definição (Distribuições Suaves).

Uma distribuição T suave é uma forma linear contínua sobre C.

O conjunto das distribuições suaves é denotado por C'.

As distribuições de Dirac, doublet e valor principal são suaves:

$\delta_{(t_0)} \in C$; $\delta'_{(t_0)} \in C$; $v.p.\frac{1}{t} \in C$.

Distribuições suaves T_f. (suficiência).

Se $f: \mathbb{R} \to C$ é localmente integrável e existe um inteiro $p \geq 0$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|^p} dt < +\infty$, então a distribuição $T_f \in C$.

Distribuições suaves (necessidade e suficiência).

Uma forma linear T definida em C é uma distribuição suave ($T \in C'$) se e somente se

$\exists$ A>0, A$\in \mathbb{R}$, $p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$ | ($\forall \varphi \in$ D) $|<\varphi, T>| \leq A\|\varphi\|_p$.

Convolução entre Distribuições.

Define-se a convolução entre duas distribuições a partir de distribuições T_f de modo que a definição seja compatível com a definição clássica, i.e. impondo

$$T_f * T_g := T_{f*g}.$$

Sendo $f,g \in L^1(\mathbb{R})$, segue-se pelo teorema de Fubini que

$< \varphi, T_{f*g} > = \iint_{\Re^2} f(u) g(v) \varphi(u+v) du dv.$

Assim,

$$< \varphi, T_{f*g} > := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) < \varphi(u+.), T_g > du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) < \varphi(v+.), T_f > dv .$$

Isto conduz à seguinte definição:

Definição (convolução).

Sejam $S,T \in$ D'. O produto de convolução $S*T$, quando existe, é a distribuição dada por

$$<\varphi, S*T> := <<\varphi(u+v), T_v>, S_u>.$$

N.B. Esta definição muitas vezes não tem sentido (vide detalhes nas referências).

Segundo esse formalismo, a Transformada de Fourier pode ser encarada como uma distribuição:

$$\forall \varphi \in \text{D}, \ < \varphi, \Im > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-jwt} dt ,$$

daí porque os resultados de espectros podem ser generalizados para incluir distribuições tais como deltas de Dirac, doublets, etc.

As transformadas contínuas de wavelets também podem ser interpretadas com distribuições. Sendo $\psi(t)$ uma wavelet-mãe, então:

$$\forall \varphi \in \mathrm{D},\ < \varphi, CWT > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(t)dt\ .$$

As relações de homotetia e translação da distribuição correspondem ao escalonamento e deslocamento usuais em wavelets.

$$i)\ < \varphi, \tau_b \psi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(t-b)dt\ .$$

$$ii)\ a \neq 0\ < \varphi, \psi_a > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\frac{1}{|a|}\psi(\frac{t}{a})dt\ .$$

Portanto, no caso geral, a transformada de wavelet corresponde à distribuição:

$$< \varphi, \tau_b \psi_a > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\frac{1}{|a|}\psi(\frac{t-b}{a})dt\ .$$

REFERÊNCIAS.

[BAY&MAR 1988] Bayen, F., Margaria, C., *Problèmes de Mathématiques Apliquées, Distributions, Analyse de Fourier, Transformation de Laplace*, Edition Marketing, 1988.

[ANT et al. 1973] Antosik, P., Mikusinski, J., Sikorski, R., *Theory of Distributions: The Sequential Approach*, Polish Scientific Pub., 1973.

[GAS&WIT 2000] G. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Paris: Dunod, 2000.

APÊNDICE B

UMA CONVERSA SOBRE TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Com o objetivo de incentivar abordagens usando uma teoria mais potente (como foi feito no estudo de séries ortogonais generalizadas, distribuições de L. Schwarz, ou na teoria de wavelets), comenta-se a idéia básica da integração de Lebesgue, que contém a integral de Riemann como um caso particular. Muitos dos resultados clássicos envolvendo integração podem ser estendidos através de uma ferramenta mais potente do que a integral clássica de Riemann.



Henri Lebesgue (1875-1941).

(Ω, A, P) $(\mathbb{R}, B, \mu)$

Como o extraordinário conceito de integração de Lebesgue (1902) generaliza a integração clássica, modernamente, a maioria das abordagens teóricas envolvendo integração tende a adotar este conceito, aumentando as possibilidades e a riqueza de resultados. A integral de Lebesgue de funções integráveis à Riemann fornece o mesmo resultado. Há, porém, uma enorme variedade de sinais integráveis à Lebesgue cuja integral de Riemann não existe. Uma excelente referência sobre o assunto é [BART 1966].

A integração de Lebesgue possibilita integrar sinais numa região bem mais sofisticada que um simples intervalo. A noção é baseada na Teoria de Conjuntos.

MEDIDA DE UM CONJUNTO

1. Álgebra de Intervalos abertos

Todos os intervalos ou conjuntos gerados a partir de uniões e complementos finitos de intervalos na reta real constituem uma álgebra de intervalos. Ela é adotada na integração de Riemann.

A medida de um intervalo, aberto ou fechado, pode ser definida pelo seu comprimento (medida no sentido compatível com uma medida euclidiana com uma régua).

Se $E:=(a,b)$ é um intervalo, então sua medida vale $m(E):=b-a$.
Como a medida de um ponto isolado é nula, a medida correspondente a um intervalo fechado $E:=[a,b]$ também corresponde à $m(E):=b-a$.

2. σ-álgebra de intervalos abertos: A σ-álgebra de Borel.

Todos os intervalos ou conjuntos gerados a partir de uniões e complementos (finitos ou não) de intervalos na reta real constituem uma σ-álgebra de intervalos, a σ-álgebra de Borel. Ela é adotada na integração de Lebesgue.

Vide o Conjunto de Cantor (a *poeira de Cantor*)

Há "mais" conjuntos que não contém nenhum intervalo dentro da σ-álgebra de Borel que conjuntos clássicos (Teoria da Categoria de Baire). Em uma analogia simples, é como se os conjuntos derivados da álgebra de intervalos correspondessem aos números racionais, enquanto que a σ-álgebra de Borel inclui numerosos conjuntos "estranhos", tal como o conjunto de Cantor, que podem ser vistos como números irracionais...

Dado um conjunto E da σ-álgebra de Borel, de medida $\mu(E)$, definem-se duas medidas:

a) medida externa

Seja I um conjunto aberto, $I \supset E$. Então $m(I) \geq \mu(E)$.

Define-se a medida $m_o(E)$ como a medida externa de E

$$\inf_{I} \quad m(I) := m_o(E) \geq \mu(E)$$

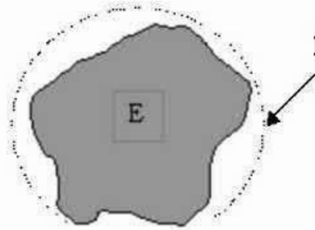


Figura. Topologia numa medida externa.

b) medida interna

Seja I um conjunto fechado, $I \subset E$. Então $m(I) \leq \mu(E)$.
Define-se a medida $m_i(E)$ como a medida interna de E

$$\sup_{I} \; m(I) := m_i(E) \leq \mu(E)$$

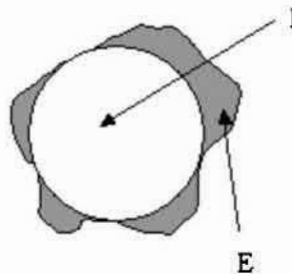


Figura. Topologia numa medida interna.

Se $m_o(E)=m_i(E)=\mu(E)$ então o conjunto E é dito ser mensurável e sua medida vale $\mu(E)$. Pode ser mostrado [RUD 1971] que a medida de Lebesgue é aditiva, i.e., a medida da união (finita ou não) de conjuntos disjuntos é a soma das medidas de cada um deles.

μ é uma generalização da medida m de intervalos. Se $E=(a,b)\subset\mathbb{R}$, então

$I:=(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\supset E$ e $\inf_{I} \; m(I) := m_o(E) = \inf_{\varepsilon} b+\varepsilon-(a-\varepsilon) = b-a$;

$I:=[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset E$ e $\sup_{I} \; m(I) := m_i(E) = \sup_{\varepsilon} b-\varepsilon-(a+\varepsilon) = b-a$ e a medida coincide com a medida clássica para intervalos.

Considere a partição do intervalo [0,1] em dois conjuntos disjuntos (partição de Dirichlet em racionais e irracionais):

$$DQ := \{x \mid 0 \le x \le 1, x \in \boldsymbol{Q}\} \text{e } DI := \{x \mid 0 \le x \le 1, x \in \boldsymbol{I}\}.$$

Claro que $[0,1] = DQ \cup DI$. A medida de Lebesgue de conjunto [0,1] é 1, e portanto $\mu[0,1] = \mu(DQ) + \mu(DI) = 1$.

Calculando-se a medida de Lebesgue do conjunto RQ, Racionais no intervalo (0,1), usa-se o arranjo de Cantor para mostrar que os racionais $\boldsymbol{Q}$ são enumeráveis.

Frações *p/q* com denominador *q*=1 (1ª linha)
Frações *p/q* com denominador *q*=2 (2ª linha)
...
Os racionais podem ser arranjados em uma seqüência $r_1\ r_2\ r_3$ ...
(postos em correspondência biunívoca com $\boldsymbol{N}$).

Assim, dado ε>0 arbitrário, considera-se a seqüência de intervalos abertos $\{I_n\} \supset DQ$

$\varepsilon/2$ centrado em r_1
$\varepsilon/2^2$ centrado em r_2
...
$\varepsilon/2^n$ centrado em r_n
...
A medida externa de DQ é cotada por

$$m_o(DQ) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \ldots = \varepsilon .$$

Desde que $0 \le m_i(DQ) \le m_o(DQ) = 0$, segue-se que μ(DQ)=0.

Como (0,1) = DQ ∪ DI ⇒ μ(0,1) = μ(DQ)+μ(DI)=1, tem-se que μ(DI)=1.

Integral de Riemann e medida de Intervalos (Álgebra de Intervalos)

$\int_I f(t)dt$ em que $I \subset \boldsymbol{R} = (-\infty,+\infty)$ é um intervalo da álgebra acima.

Assim, por exemplo, $\int_0^1 f(t)dt = \int_{(0,1)} f(t)dt$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{\Re} f(t)dt$.

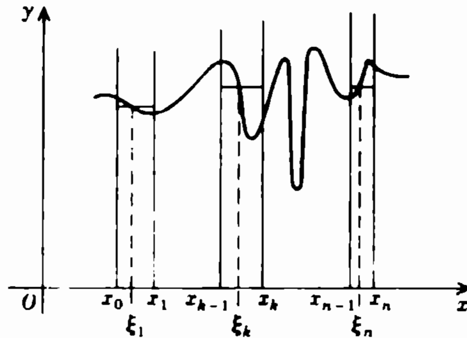
A integral de Riemann pode ser definida utilizando a medida de um intervalo. O intervalo $[a,b]$ é particionado como $\{ (x_{k-1}, x_k) \}$, em que

$$a := x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n := b \,.$$

Para um intervalo aberto (x_{k-1}, x_k), a medida vale:

$$m(x_{k-1}, x_k) = x_k - x_{k-1} := \Delta x \,.$$

Interessa o limite $n \to \infty$ e $m(x_{k-1}, x_k) \to 0$ (partição arbitrariamente refinada).



Com $y_k := f(\xi_k)$, o somatório

$$s := \sum_{k=1}^{n} y_k m(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k (x_k - x_{k-1})$$

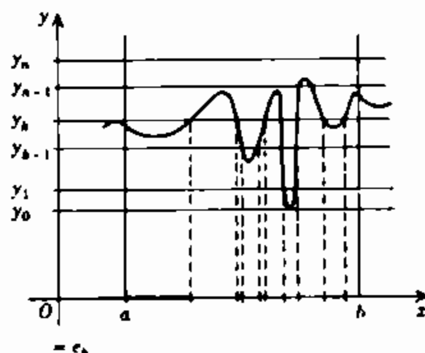
representa certa área que presumivelmente aproxima-se da área sob a curva $y=f(x)$. Se s tem um único limite, independente da partição do intervalo $[a,b]$, então este limite é chamado de integral de Riemann.

Integral de Lebesgue e medida de Lebesgue (σ-Álgebra de Borel)

Para definir a integral de Lebesgue de $f(x)$, particione o eixo da ordenadas em $\{y_0, y_1, y_2 ..., y_n\}$, com $y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n$ e construa o somatório

$$\sigma := \sum_{k=1}^{n} y_k m(e_k) \,.$$

Quando f é mensurável e limitada, a soma σ admite um único limite independente da partição, provido que ela seja substancialmente refinada. Este limite é chamado de integral de Lebesgue.



Diferenças entre as duas integrais.

i) o eixo das abscissas é particionado na Integral de Riemann.
ii) o eixo das ordenadas é particionado na Integral de Lebesgue.
iii) A integral de Riemann só pode ser feita sobre elementos da álgebra de intervalos abertos. (noção chave: comprimento do intervalo)
iv) A integral de Lebesgue pode ser calculada sobre qualquer conjunto da σ-álgebra de Borel. (noção chave: medida do conjunto).
v) Os conjuntos $\{e_k\}$ desempenham o papel dos intervalos (x_{k-1}, x_k).
vi) A integral de Riemann falha quando f não permanece próximo a y_k na maioria dos intervalos (x_{k-1}, x_k) enquanto que a integral de Lebesgue garante que $f(x)$ é automaticamente próximo de y_k dentro dos intervalos e_k.

Pode ser mostrado que se a integral de Riemann existe, então a integral de Lebesgue também existe e assume o mesmo valor. Mas, por outro lado, há uma enormidade de funções que não são integráves à Riemann, mas que o são à Lebesgue.

REFERÊNCIAS

[BART 1966] R. G. Bartle, *Elements of Integration*. Wiley, 1966.

[RUD 1971] W. Rudin, *Princípios de Análise Matemática*, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

[WEI 2000] A.B. Weinholtz, *Integral de Riemann e de Lebesgue em* R^N, 3ª Ed., 2000, Universidade de Lisboa, DM.

UMA CENTENA DE PROBLEMAS PROPOSTOS.

*1 Revise as definições de espaço vetorial, produto escalar, produto Hermitiano e norma.

*2 Verificar que $<f(t),g(t)>:=\int_a^b p(t)f(t)g(t)\,dt$, com $p(t)>0$ em $a\leq t\leq b$, constitui um produto interno de funções reais. Admitir apenas a classe de funções para as quais o produto existe. Mostre como conseqüência que $\|f(t)\|=\left[\int_a^b p(t)f^2(t)dt\right]^{1/2}$ define uma norma.

*3 Que condições devem ser impostas sobre a função de ponderação $p(t)$ de modo que $<f(t),g(t)>:=\int_a^b p(t)f(t)g^*(t)\,dt$ defina um produto Hermitiano?

*4 Os polinômios de Tchebyshev de primeira espécie são definidos pelas relações:

$T_n(t)=\cos(n \arccos t)$ em $|t|\leq 1$. Assim, $T_0(t)=1$, $T_1(t)=t$, $T_2(t)=2t^2-1$, $T_3(t)=4t^3-3t$ etc. Mostrar que $\{T_n(t)\}$ são ortogonais no intervalo $[0,1]$ com relação à função de peso $p(t)$ dada por

$p(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Sugestão: Calcular a integral fazendo a mudança de variável $\arccos t=\theta$.

*5 Utilizando os resultados da questão anterior, demonstre que um sinal $f(t)$ definido em $|t|<1$, pode ser desenvolvido em série ortogonal:

$$f(t)\cong\frac{c_0}{2}T_0(t)+c_1T_1(t)+c_2T_2(t)+\ldots$$

Qual deve ser a escolha dos coeficientes c_n? Justifique. Assuma $\{T_n(t)\}$completo.

*6 Os polinômios de Hermite, Laguerre e Legendre são encontrados pela fórmula de Rodrigues, respectivamente

$H_0(t)=1$ $\qquad H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$

$L_0(t)=1$ $\qquad L_n(t)=e^t\dfrac{d^n}{dt^n}t^n e^{-t}$

$P_0(t)=1$ $\qquad P_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$

Encontre os três primeiros polinômios de cada família de polinômios.

*7 As propriedades de ortogonalidade são expressas pelas relações seguintes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ H_n(t)\, H_m(t)\, dt = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\ \delta_{n,m}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, L_n(t)\, L_m(t)\, dt = (n!)^2\ \delta_{n,m}$$

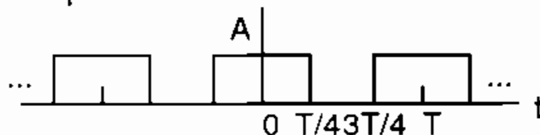
$$\int_{-1}^{+1} P_n(t)\, P_m(t)\, dt = \frac{2}{2n+1}\ \delta_{n,m}$$

a) Encontre a expansão em série de polinômios de Hermite para uma função genérica $f(t)$. Quais os coeficientes do desenvolvimento?

b) Repita o item anterior para polinômios de Laguerre e de Legendre, especificando os intervalos de validade.

*8 Explique porque a série de Fourier é mais importante que os outros desenvolvimentos em séries de funções ortogonais.

*9 a) Avalie o erro médio quadrático resultante da aproximação da onda quadrada $f(t)$, por $a_0 + a_1\cos w_0 t + a_3\cos 3w_0 t$, ou seja, até o 3º harmônico. Desenhe a aproximação.



b) É possível, alterando o diagrama do item anterior, obter harmônicos pares e ímpares no desenvolvimento em série de Fourier de $f(t)$? Justifique.

*10 Seja $f(t)$ um sinal periódico, $t_0 \leq t < t_0 + T$, derivável e com derivada absolutamente integrável. Demonstrar que $\exists\ M \mid (\forall\ n \in N)\ |a_n| \leq M/n$ e $|b_n| \leq M/n$.

Qual o significado deste resultado? Sugestão: Aplique integração por partes.

*11 A obtenção dos coeficientes de Fourier na série pode ser simplificada se a função periódica satisfaz certas condições de simetria. Demonstre a validade das proposições:

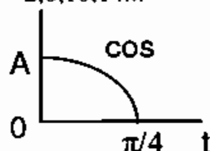
a) Se $f(t)$ é par, então todos os termos em seno da série são nulos,

b) Se $f(t)$ é ímpar, então todos os termos em cosseno da série são nulos,

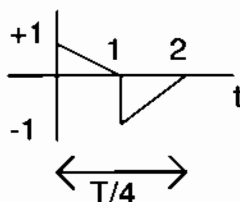
c) Se $f(t) = -f(t \pm T/2)$, chamada simetria de meia onda, então todos os harmônicos pares anulam-se.

d) Qual a condição para a existência de apenas harmônicos pares? O que se conclui desta condição?

*12 Obtenha uma série trigonométrica que represente $f(t)$ abaixo em $[0,\pi/4]$, de modo a conter:
a) Termos em seno e cosseno com freqüências w=4,8,12,16,...
b) Somente termos em seno w= 2,6,10,14...



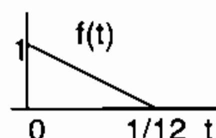
*13 Uma forma de onda periódica é exibida apenas em um quarto do período, e deve ser completada de modo que:
a) A função seja ímpar, contendo apenas harmônicos pares,
b) A função seja par, contendo harmônicos pares e ímpares.



*14 Desenvolver em série de Fourier a função $f(t)=t$, definida em $0<t<1$, contendo apenas:
a) Harmônicos ímpares   b) Harmônicos pares
c) Mostre que a série converge em $t=1$ tanto no item a como no b.

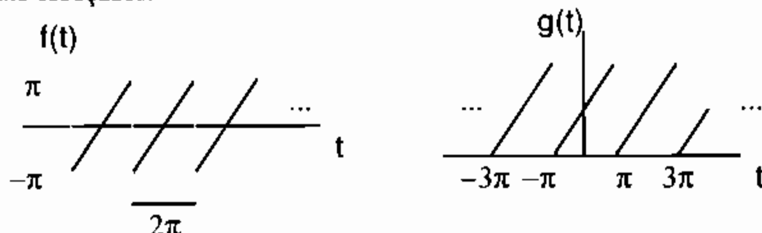
*15 Desenvolver $f(t)=t$ em $0<t<1$ mseg em série de cossenos contendo apenas harmônicos ímpares com fundamental 500 Hz. (Não é necessário obter a série, apenas exibir a forma de onda periódica completa).
Sugestão: Observar que o nível dc não influi no conteúdo harmônico.

*16 Para o sinal $f(t)$ mostrado abaixo, encontre uma série de Fourier que o represente no intervalo (0,1/12), contendo:
a) Termos em seno e cosseno, com freqüências 6,12,18,24,...
b) Apenas termos em seno, com freqüências 3,9,15,21,...
c) idem, com freqüências 3,6,9,12,...
d) Apenas termos em cosseno, com freqüências 1,3,5,7,...



*17 Desenvolver em série trigonométrica de Fourier $f(t)=A\ \mathrm{sgn}(\mathrm{sen} w_0 t)$.

*18 Desenvolver em série trigonométrica de Fourier os sinais periódicos f e g abaixo esboçados:



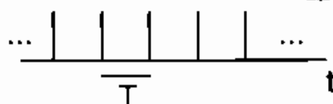
Sugestão: retire o nível dc.

*19 Esboce o gráfico da senoide retificada onda completa $f(t)=\frac{\pi}{2}\left|\mathrm{sen}\ 2\pi t\right|$, e encontre a respectiva representação em série trigonométrica de Fourier.

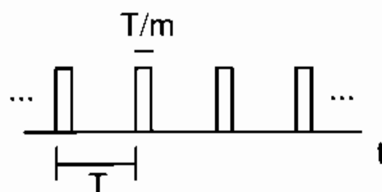
*20 Desenvolva em série trigonométrica uma senoide retificada em meia onda. Compare com o resultado da questão anterior.

*21 Determine a expansão em série trigonométrica associada às funções "trens":

a) Um trem de impulsos (pente de Dirac) $\delta_T(t):=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

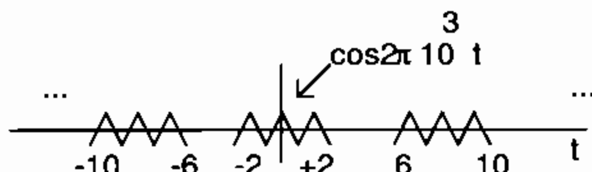


b) Um trem de pulsos (pente) $\Pi_T(t):=\sum_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\frac{t-nT}{T/m})$



*22 Desenvolva na representação trigonométrica da série de Fourier, a função periódica $f(t) = \cosh \mu t \quad |t| \leq \pi$, com μ fracionário.
Sugestão: Obtenha inicialmente a série na representação exponencial e use a relação entre os coeficientes F_n, a_n e b_n.

*23 Qual a expansão em série de Fourier para a função periódica esboçada abaixo?



*24 Mostre que a função periódica $f(t)=\exp(x \cos w_C t)$ pode ser desenvolvida em série trigonométrica de Fourier. Sugestão: Refira-se às funções de Bessel modificadas de primeira espécie.

*25 Desenvolver em série trigonométrica a função $g(t)$ cuja definição em um período é $g(t) = t^2$, $0<t<2\pi$. Aplicando este resultado, mostre que

a) $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} - \ldots$

b) $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots$

*26 A função $p(t)=\begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ é utilizada para gerar um sinal periódico expresso por $v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p(t-n)\, u(t-n)$, em que $u(t)$ é o degrau unitário (Heaviside). Qual a expansão de $v(t)$ em série trigonométrica?

Sugestões: Use $\int e^{at} \operatorname{sen} bt\, dt = \dfrac{e^{at}(a \operatorname{sen} bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2}$

$\int e^{at} \cos bt\, dt = \dfrac{e^{at}(a \cos bt + b \operatorname{sen} bt)}{a^2 + b^2}$.

*27 A função periódica $f(t)= -\ln \left| \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{2T} \right|$, $0<t<T$ é desenvolvida em série trigonométrica. Esboce o espectro discreto associado a esta forma de onda.

*28 (Outras formas para expandir em séries de Fourier) Encontre o desenvolvimento em série trigonométrica para os seguintes sinais: cos(sen$t$)$e^{\cos t}$ e $j$sen(sen$t$) $e^{\cos t}$.
Sugestão: Considere o desenvolvimento em série de MacLaurin (!) para a função complexa e^z, com $z=e^{jt}$. Obtenha as partes real e imaginária do sinal exp(e^{jt}).

*29 Determine o conteúdo harmônico da extensão periódica do sinal

$h(t)$ = sgn(t) $e^{-|t|}$ em t<1, i.e., $h(t)=\begin{cases} e^{-t} & 0<t<1 \\ -e^{t} & -1<t<0 \end{cases}$.

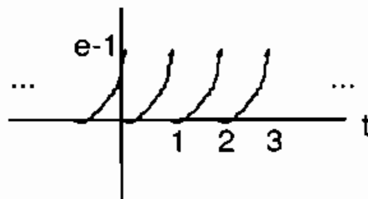
*30 Desenvolver em série de Fourier a seguinte função: $f(t)=A$ sen $\alpha|t|$.

*31 Demonstrar que sempre se pode expressar uma função $f(t)$ qualquer como a soma de duas funções componentes, sendo a primeira par e a segunda ímpar, i.e., $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$.

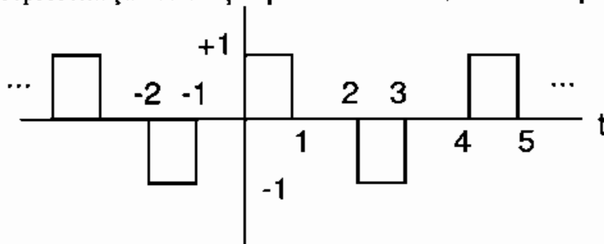
Encontre as componentes par e ímpar para $u(t)$ e e^{-at} $u(t)$.

*32 Representar o sinal A sgn($\pi^2\sqrt{3}$ sen($2\pi t/T_0$)) mediante uma série de Fourier.

*33 Obtenha a série exponencial para a função periódica $g(t)=e^t-1$, representada graficamente abaixo.



*34 Qual a representação da função periódica abaixo, em série exponencial?

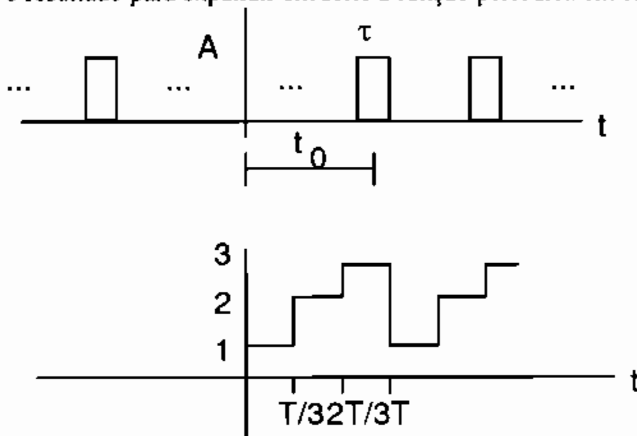


*35 O sinal $f(t)=e^{-at}$ $0\leq t<T$, com $a>0$, encontra-se esboçado a seguir, considerando-o periódico. Determine a série de Fourier associada a tal sinal.



*36 Considere a função real do tempo, definida por $f(t)=\text{sgn}(t)\, e^{-t}$, $-1<t<1$, periódica com período $T=2$. Esboce $f(t)$ e determine o respectivo desenvolvimento em série exponencial de Fourier.

*37 Desenvolva em série complexa de Fourier o trem de pulsos abaixo, e empregue o resultado para expandir em série a função periódica em escada.



*38 Calcular as seguintes convoluções:

a) $e^{-a(t-t_0)}\, u(t)*[\delta(t)-\delta(t-t_0)]$ b) $t^2\,[u(t+1)-u(t-1)]*\Pi(t/2)$.

*39 Mostre que $\Lambda(t)*\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\delta(t-nT)$, $T\geq 2$, constitui um polígono que passa através dos pontos (nT,a_n). Esboçe o resultado para $T=2$.

*40 Avaliar as expressões abaixo, envolvendo o delta de Dirac:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\delta(t-3)\, dt$ b) $t^2*\delta(t-2)$ c) $\sqrt{t}\,\delta(t-7)$ d) $\ln|t| * \delta(t)$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(3t)\text{sen}\, t\, dt$ f) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(2t-1)\, e^t\, dt$ g) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\delta(t-2)dt$.

*41 Efetuar as convoluções abaixo relacionadas, utilizando o método gráfico.

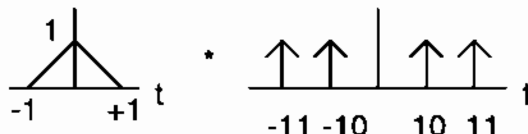
a) $u(t)*e^{-t}\,u(t)$ b) $e^{-t}\,u(t)*e^{-3t}\,u(t)$ c) $u(t)*t.u(t)*u(t)$ d) $e^{-at}\,u(t)*e^{-bt}$ $a,b>0$.

*42 Calcule e esboce o resultado dos produtos de convolução envolvendo impulsos:

a) $(t-3)\,\Pi(\frac{t-4}{2})*[\,\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

b) $\delta(w-w_0)*\delta(w-w_1)$

c)



*43 Avaliar graficamente os seguintes produtos de convolução, esboçando as respectivas soluções:

a) $\tau\,\Lambda(t/2\tau)*\Pi(t/\tau)$ b) $\Pi(\frac{t-\tau/2}{\tau})*e^{-t}$ c) $e^{-2t}\,u(t)*\Pi(t-2)$

d) $\Pi(t/\tau)*\Pi(t/\tau)*\Pi(t/\tau)$

*44 Mostre que a convolução de duas "portas" de larguras diferentes, $\Pi(t/\tau_1)*\Pi(t/\tau_2)$, $\tau_1 \geq \tau_2$, resulta num trapézio com base maior $\tau_1+\tau_2$ e base menor $\tau_1-\tau_2$.

*45 Avalie a convolução $\frac{1}{\pi t} * \frac{-1}{\pi t}$. Sugestão: Use o domínio da freqüência.

*46 Calcular o produto convolucional f(t)*g(t) quando f e g são periódicas definidas em um período pelas relações:

$$f(t)=\begin{cases} A & |t|<1 \\ 0 & 1<|t|<2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(t)=1-|t|,\ |t|\leq 1.$$

*47 a) Avalie a integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(g(t))\,f(t)\,dt$, sabendo que os zeros de $g(t)$ são $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ e que $g^{(n)}(t)$ existe para cada n. Admita ainda $g'(t_i)\neq 0$, $i=1,2,3,\ldots n$.

b) Demonstre que se f tem descontinuidade de primeira ordem na origem, então vale o seguinte resultado: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \quad \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

*48 Um sinal real $f(t)$ de período T, tem freqüência máxima $f_{max}=N/T$. A energia média de um sinal periódico é dada por $E_{av}= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt$. Mostre que $E_{av} = \sum_{n=-N}^{N} \left|F_n\right|^2$, em que F_n é o enésimo coeficiente de Fourier da expansão.

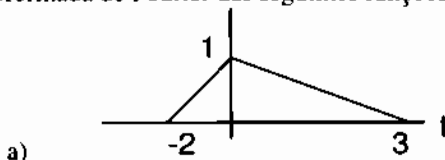
*49 O que é possível concluir com relação a um sinal f cujo espectro de freqüências é:

a) Discreto b) Contínuo c) Contém uma parte discreta e outra contínua.

*50 Aplique a propriedade da transformada da derivada para encontrar a transformada de Fourier do degrau unitário. A resposta obtida é correta? Por quê?

*51 Calcular, empregando dois métodos diferentes em cada item, a transformada dos sinais porta e triângulo.

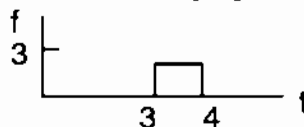
*52 Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:

a) 

b) $f(t) = A\,\Pi(t/\tau)\cos w_0 t$.

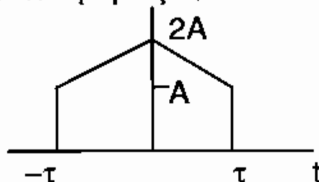
*53 Determine o espectro dos seguintes sinais:

a) $1/t,\ t \neq 0$. b) $\mathrm{Sa}(w_0(t-t_0))$. c)

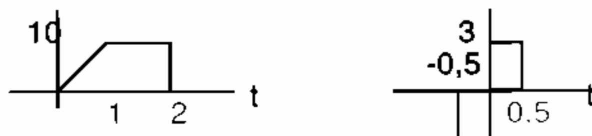


d) $t^2 f(at)\,u(t-2)$, se $f(t) \leftrightarrow F(w)$. e) $\Pi(t/\tau)\cos w_0 t$.

*54 Aplicando o princípio da superposição, encontrar a transformada do pulso:



*55 Dois sinais $f_i(t)$, i=1,2 estão esboçados abaixo. Encontre o espectro de ambos.

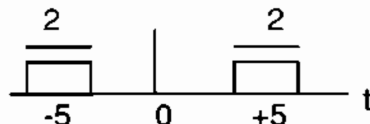


*56 Esboce o espectro do seguinte sinal:

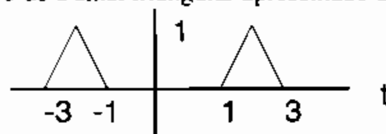


Sugestão: Escreva-o em termos de uma função porta.

*57 Empregando pelo menos dois processos diferentes, determinar a transformada de Fourier do sinal abaixo:



*58 Calcule o espectro de o sinal triangular apresentado a seguir.



*59 Dado que $f(t) \leftrightarrow F(w)$, avaliar o espectro das seguintes combinações de sinais:

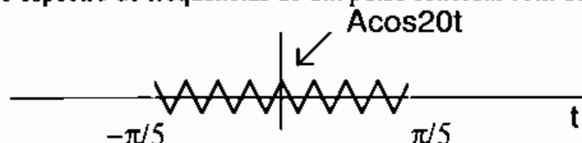
a) $t^2 f(at)$ b) $f(a\text{-}bt)$ c) $f(t)*\delta(t\text{-}4)$ d) $f(t)\, e^{jw_0t}$.

*60 Repita a questão anterior para as seguintes composições:

a) $t\, df/dt$ b) $t\, f(\text{-}2t)$ c) $(t\text{-}k)\, f(t\text{-}k)$ d) $f(t)\, u(t\text{-}1)$.

*61 Calcule e desenhe o espectro de um tom defasado $\cos(at\text{-}\theta_0)$.

*62 Avaliar o espectro de freqüências de um pulso senoidal com duração $2\pi/5$:



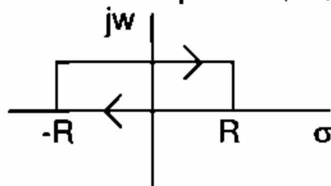
*63 Esboce o sinal abaixo e mostre o espectro correspondente, $t_0 >> 0$:

$\{Sa(t-t_0) + Sa(t+t_0)\}\cos w_0 t.$ $Sa^2(2t).$

*64 Avalie e esboce o espectro de uma senoide iniciando na origem (nula para valores negativos), i.e., sen $w_c t \cdot u(t)$. Repita para um tom cos $w_c t \cdot u(t)$.

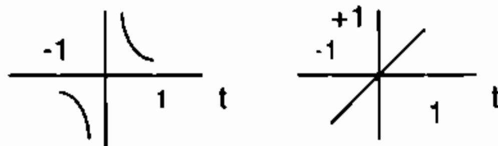
*65 Aplicando a definição, calcule a transformada de Fourier de um pulso .Gaussiano

Sugestão: Uma integral de contorno é requerida. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.



*66 Determine a transformada de Fourier dos sinais f e g dados por

$$f(t) = \frac{1}{t}\Pi(t/2) \quad \text{e} \quad g(t) = t\,\Pi(t/2).$$



*67 Calcular a transformada da função $f(t) = \ln|t|$.

Sugestão: Use o teorema da derivação. $\ln(t).u(t)+\ln(-t).u(-t)$.

*68 Calcule o espectro de um pulso cossenoidal deslocado:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi t}{\tau}) & |t| \le \tau \\ 0 & |t| \ge \tau. \end{cases}$$

Sugestão: Um meio é determinar $\Im f'(t)$.

*69 Determine o espectro dos dois sinais descritos pelas expressões analíticas:

$$f(t) = \frac{1}{a+b(t-t_0)^2} \quad a,b>0 \qquad \text{e} \qquad g(t)=A\,Sa^2(w_0(t-\tau)).$$

*70 Calcular a anti-transformada de Fourier do sinal $\frac{2\tau^2}{\tau^2+w^2}Sa(\frac{w\tau}{2})$.

Sugestão: $\exp(-a|t|) \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2}$.

*71 Empregando a análise de Fourier, avaliar o espectro dos seguintes sinais:

a) $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(w_0 x+\theta)\frac{1}{t-x}\,dx$

b) $f(t)=\begin{cases} V\cos^2(\pi 10^6 t), & |t|\leq 0{,}5\mu s \\ 0 & |t|>0{,}5\mu s. \end{cases}$

*72 Considere o sinal $f(t)=\begin{cases} e^{j\beta t^2} & a\leq t\leq b \\ 0 & \text{fora deste intervalo.} \end{cases}$

Determine a transformada de Fourier em termos da integral de Fresnel:

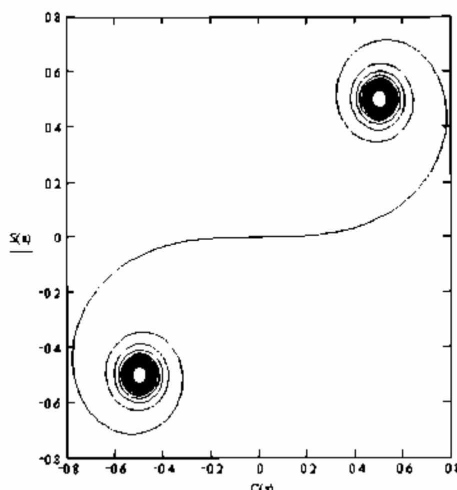
$K(x)=\int_0^x e^{j\pi\tau^2/2}d\tau.$

$K(x) = C(x)+jS(x)$, com

$C(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi}{2}\tau^2\,d\tau$, Integral Cosseno de Fresnel,

$S(x)=\int_0^x \text{sen}\frac{\pi}{2}\tau^2\,d\tau$, Integral Seno de Fresnel.

Vide S(x) × C(x) **CORNU SPIRAL.**



*73 Calcule a transformada de Fourier do pulso Gaussiano $v(t)=Ae^{-\pi(t/\tau)^2}$.

*74 Calcular a transformada de Fourier da função $f(t)=|t|^{-1/2}$, $t\neq 0$, empregando a função fatorial generalizado de Euler $\Gamma(.)$.

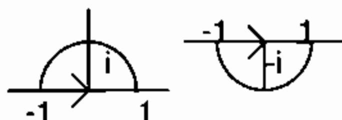
$$\int_0^\infty e^{-pt}\, t^{\alpha}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \text{e} \qquad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

*75 Encontre o espectro do sinal $x(t)=Ae^{-a|t|}\,\mathrm{Sa}(w_0 t)$.

*76 Mostrar que o espectro $F(w)$ de um sinal $f(t)$ genérico pode ser desenvolvido em série de Taylor como:

$F(w) = m_0 - jm_1 w - m_2\frac{w^2}{2!} + jm_3\frac{w^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-j)^n\, m_n\, \frac{w^n}{n!}$, em que m_n representa o n-ésimo momento do sinal, i.e., $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, f(t)\, dt$. Sugestão: Utilize a diferenciação na freqüência.

*77 Avalie a transformada de Fourier do sinal: $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{t^2-2t+2}$.



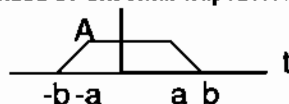
Sugestão: Uma integral de contorno é requerida. Use decomposição em frações parciais.

*78 Calcular a transformada de Fourier de um sinal Gaussiano modulado:

$f(t) = A\, \cos w_0 t\;\, e^{-\pi[(t-t_0)/\tau]^2}$.

*79 Qual o espectro de um pulso de Cauchy $z(t)=\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{1+t^2}$? (Integral de contorno).

*80 Determine a transformada de um sinal trapezoidal.

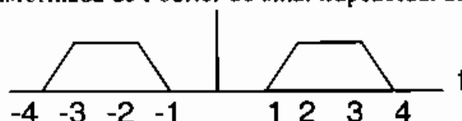


Sugestão: Use derivada duas vezes.

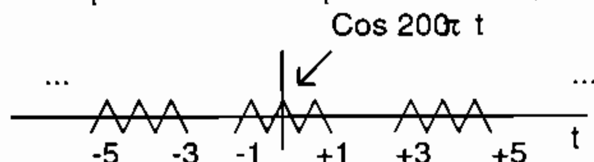
*81 Avaliar a transformada de Fourier do sinal $f(t)$ abaixo, em termos da função de Bessel de 1ª espécie. $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}$, $|t|<a$.

Sugestão: Faça a mudança de variável θ=arccos(t/a).

*82 Calcule a transformada de Fourier do sinal trapezoidal abaixo:



*83 Um sinal corresponde a uma série de pulsos cossenoidais, como indicado.



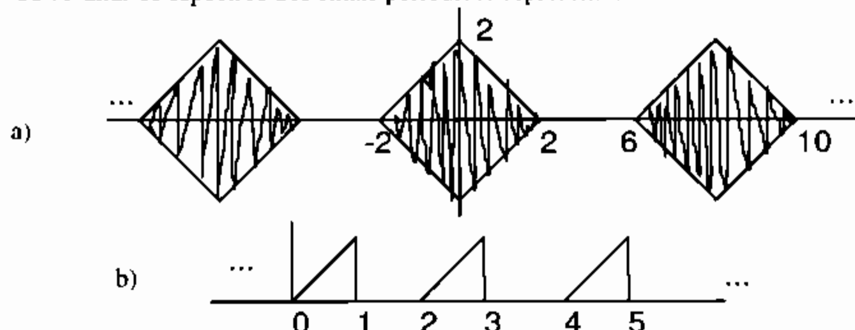
*84 Escreva $g(t)=\exp(-|t|)$ em termos de $f(t)=\exp(-t)u(t)$ e encontre $G(w)$. Daí obtenha também a transformada de Fourier $\Im(\frac{1}{a+bt^2})$, $a,b>0$.

*85 Para a função $f(t) = Aae\ te^{-at}u(t)$, $a>0$, determine $|F(w)|$ e $\Theta(w)$, e esboce as curvas correspondentes ao sinal e sua transformada.

*86 O que se pode esperar da transformada do sinal $f(t) = e^{-|at|}$ sgn$t$, levando em conta a simetria? Avalie o espectro e confirme o fato.

*87 Encontre a transformada de um pulso parabólico, $v(t)=V[1-(t/\tau)^2]$, $|t|<\tau$.

*88 Avaliar os espectros dos sinais periódicos representados abaixo:



*89 Considere a função $Q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\exp(-\xi^2/2)\,d\xi$. Calcular $\Im\{Q(t)\}$.

Sugestão: Expressar $\int_t^{\infty} f(\xi)d\zeta$ em termos de uma convolução do integrando e o degrau unitário.

*90 A função χ^2 (qui quadrado com n graus de liberdade) é dada pela expressão: $f(t)$=K.$t^{(n-2)/2}\ e^{-t/2}\ u(t)$, $n>2$. Determine K de modo a normalizar $f(t)$, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)d\zeta = 1$, e calcule a transformada do sinal normalizado.

Sugestão: Use a função Gama de Euler (*fatorial generalizado*): $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1}\, e^{-u}\, du$.

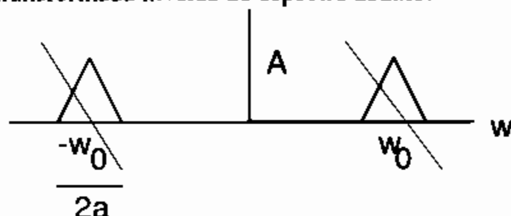
*91 Calcule a Transformada de Fourier da função cos($\alpha t^2+\beta t$), $\alpha,\beta>0$ reais.
Sugestão: Complete o quadrado e use a Integral de Fresnel.
Dados: K(∞) = (1 + j)/2 e $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$.

*92 Avalie o espectro $\mathcal{F}$ cos($w_0 t^2$). Compare com o resultado da questão anterior.
Sugestão: Use a Integral de Fresnel. K(∞)=(1+j)/2.

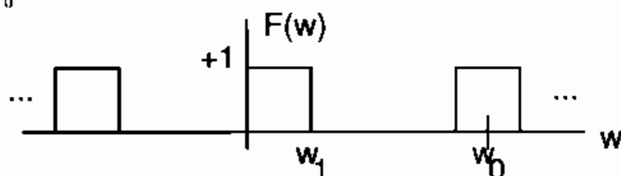
*93 A expressão $f(t) = \dfrac{te^{-t^2/2\sigma^2}}{\sigma^2}$ descreve a chamada curva de Rayleigh.

Esboce $f(t)$ e determine sua transformada de Fourier.

*94 Obtenha a transformada inversa do espectro abaixo:



*95 Calcular a transformada inversa de Fourier do seguinte sinal, provido que $2w_1<w_0$:



*96 Avalie a TIF (Transformada Inversa de Fourier) para cada dos espectros:

a) $F(w) = u(w-w_0)\, e^{-jwt_0}$ b) $F(w)$ = sgn($3w$) c) $A\ \cos^2(wt_0)$

d) $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(w - nw_0)$ e) $F(w) = \begin{cases} A & |w - w_0| < a/2, \\ 0 & |w - w_0| > a/2 \end{cases}$ $w_0 >> a/2$.

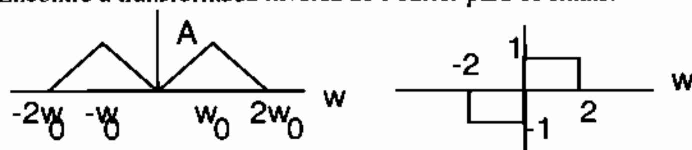
*97 Calcular a transformada inversa de Fourier correspondente ao espectro $F(w) = \text{sen}\,\beta|w|$.

*98 Determine a TIF do sinal $\frac{2}{jw}\,e^{-\sigma^2 w^2/2}$. Use pares conhecidos de transformadas.

*99 Obter o sinal cujo espectro é descrito por $F(w) = [\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}]\ \Pi(w/2w_0)$.

*100 Avaliar a transformada inversa de Fourier do sinal $F(w) = \text{Sa}(w).\cos(wt_0)$.

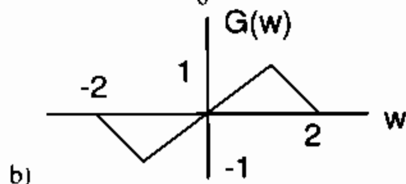
*101 Encontre a transformada inversa de Fourier para os sinais:



*102 Considere três espectros $F_i(w)=|F(w)|\,\text{expj}\,\Theta_i(w)$ diferindo apenas em fase das componentes. Assumindo magnitude $|F(w)|=\Pi(w/2w_0)$ e fases dadas $\Theta_1(w)=0$, $\Theta_2(w)=-wt_0$ e $\Theta_3(w)=\pi/2\ \text{sgn}(w)$, esboce $|F|$ e Θ em cada caso e encontre os respectivos sinais no domínio temporal, $f_i(t)$, $i=1,2,3$.

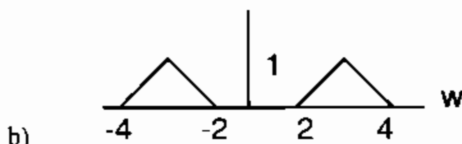
*103 Calcular a TIF (Transformada Inversa de Fourier) das seguintes funções:

a) $\frac{\pi}{2}[\ \delta(w-w_0)+\delta(w-w_0)\,]+\frac{jw}{w_0^2-w^2}$,



*104 Encontre o sinal cujo espectro é $F(w) = e^{-aw^2}\ \text{Sa}(bw)$, $a,b>0$.

*105 Calcular as seguintes transformadas inversas de Fourier:



a) $A\dfrac{\text{sen}^2 wt_0}{(wt_0)^2}$ b)

*106 Mostre um esquema para avaliar uma integral de convolução por computador digital, com o auxílio do algoritmo FFT.

*107 Demonstre a propriedade de linearidade da DFT, i.e.,

$f(l) \leftrightarrow F(n)$ e $g(l) \leftrightarrow G(n)$ então $\alpha f(l)+\beta g(l) \leftrightarrow \alpha F(n)+\beta G(n)$.

*108 Calcule a DFT para os seguintes sinais (N=2, N=4): {1,1} e {1,1,0,0}.

*109 Calcule a DFT do sinal $f(l)=1$, $l=0,1,2,...m-1$; $f(l)=0$, $m \le l \le N-1$, o equivalente discreto de um pulso retangular. Faça um esboço do espectro $F(n)$ para $n \le 2N$. Considere N=100 e m=10.

Sugestão: $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\text{sen}[(n+1/2)\theta]}{\text{sen}\,\theta/2}$,

*110 Em alguns casos, tais como sinais de TV, é necessário o emprego da transformada bidimensional de Fourier, obtida de acordo com as relações:

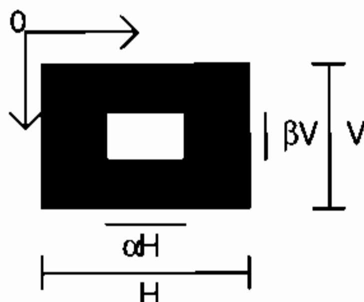
$$F(u,v) \equiv \iint_{-\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \quad f(x,y) \equiv \iint_{-\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}\,du\,dv .$$

Deduza propriedades de Linearidade, escalonamento e deslocamento no tempo para o caso bidimensional.

*111 (Espectro de Sinais bidimensionais).

Considere o padrão de imagem apresentado na figura abaixo, correspondente a um quadro de um sinal de vídeo, *um sinal de vídeo estático para testes* ou uma foto, por exemplo. Assuma a origem h=0, v=0 no canto esquerdo superior. O sinal de luminância associado é expresso por:

$$I(h,v)=\begin{cases} 1 & \text{se } \dfrac{H}{2}-\dfrac{\alpha H}{2} < h < \dfrac{H}{2}+\dfrac{\alpha H}{2},\ \dfrac{V}{2}-\dfrac{\beta V}{2} < v < \dfrac{V}{2}+\dfrac{\beta V}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



a) Determine o espectro do sinal, através do desenvolvimento em série bidimensional.

b) Considere os seguintes parâmetros: α=0,6 β=0,4 e f_h=20f_v. Sendo $f_{mn}=mf_h+nf_v$, e esboce o espectro do sinal.

*112 Deduza a fórmula de Poisson (S. Denis), relacionando amostras no tempo e na freqüência: Se $f(t) \leftrightarrow F(f)$, então vale $\sum_{-\infty}^{+\infty} f(kT_S) = f_S \sum_{-\infty}^{+\infty} F(nf_S)$.

*113 Um sinal $f(t)$ é banda limitada em f_m Hz. Encontrar o espectro do sinal amostrado, se a amostragem natural se realiza com um pulso de forma arbitrária $p(t) \leftrightarrow P(w)$. Suponha que a duração do pulso é menor que o intervalo de amostragem. Observe o espectro quando $p(t)=\Lambda(\frac{t-\tau/2}{\tau})$, em particular.

*114 Generalize o teorema da amostragem uniforme para sinais cujo espectro vai de f'_m a f_m Hz. Mostre que a taxa de amostragem deve ser de $f_s \geq \frac{2f_m}{n}$, em que $n=\lfloor f_m/(f_m - f'_m) \rfloor$ Sugestão: Empregue um passa-faixa para recuperar o sinal.

*115 Generalize o teorema da amostragem de Shannon para sinais bidimensionais f(x,y) com limitação em banda passante diferente em cada direção, f_{mx} e f_{my}, respectivamente.

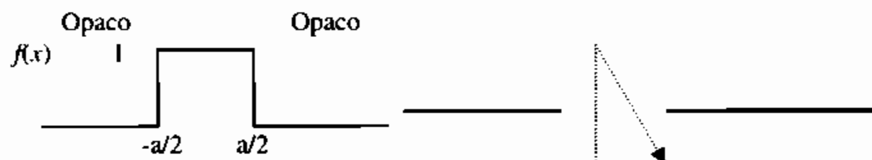
*116 Os sinais $f_1(t)=|t|$ e $f_2(t)=t.u(t)$ não são de energia finita. Usando a teoria das distribuições, determine os espectros generalizados.

*117 Em fenômenos de difração de Fraunhofer, mostra-se que existe uma relação entre o padrão de difração e a característica de absorção do anteparo. Sendo λ o comprimento de onda da luz monocromática incidente, e $f(x)$ o

coeficiente de transmissão no ponto x, mostra-se que o padrão de difração (amplitude complexa da onda resultante) na tela é

$$F(\kappa)=F\left(2\pi\frac{sin\theta}{\lambda}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j2\pi\frac{sin\theta}{\lambda}x}dx \quad \text{em que} \quad \kappa=2\pi\,(\sin\theta)/\lambda.$$

Para avaliar a difração em uma fenda de comprimento **a**, calcule a distribuição da intensidade da luz difratada na direção θ, considerando o coeficiente de transmissão abaixo (porta). Mostre que $I=(Aa)^2 Sa^2\left(\frac{\pi a sin\theta}{\lambda}\right)$.



*118 Se $f\in L^2$ e $\psi_{a,b}\in L^2(R-\{0\}\times R)$, considere os pares de transformadas abaixo: $f(t)\leftrightarrow F(w)$, $\psi(t)\leftrightarrow\Psi(w)$, $\psi_{a,b}(t)\leftrightarrow\Psi_{a,b}(w)$. A transformada contínua de wavelet é definida por: $CWT(a,b):=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\psi_{a,b}(t)dt$. Sob que condições é possível "pegar uma onda?" (**catch the wave**!). Se $C_\psi:=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(w)|^2}{|w|}dw<+\infty$, então mostre que a transformada inversa é dada por: $f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}CWT(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dbda}{a^2}$.

*119 Qual a CWT de $f(t)=1$? De que forma o resultado depende da wavelet escolhida? É possível reconstruir o sinal? Comente.

*120 Dado CWT[$f(t)$]=$C(a,b)$, determine: CWT $\{f(t-t_0)\}$ e CWT $\{f(kt)\}$, $k\neq 0$.

*121 Determine o espectro da wavelet $\psi^{Sha}(t)=Sa\left(\frac{\pi t}{2}\right).\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$. Verifique o caráter passa-faixa.

*122 A função de escala $\varphi\leftrightarrow\Phi$ de uma wavelet contínua $\psi\leftrightarrow\Psi$ pode ser determinada a partir da relação: $|\Phi(w)|^2=\int_w^{+\infty}\frac{|\Psi(w)|^2}{w}dw$. Para uma wavelet sombrero, calcule a constante de admissibilidade e a função de escala da análise associada.

*123 Aplicando o teorema S-N-K, demonstre a fórmula $Sinc(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sinc(n).Sinc(2t-n)$

*124 Use a relação $Sinc(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sinc(n).Sinc(2t-n)$ para mostrar que constitui uma função de escala para uma análise por wavelets: *a wavelet de Shannon*.

*125 Usando a caixa de ferramentas do wavelets do Matlab, (wavemenu), trace os escalogramas para o sinal padrão "frequency breakdown", usando duas wavelets distintas. Determine também as decomposições em 4 escalas.

*126 Aplicando a caixa de ferramentas do Matlab (*wavemenu*), empregue a rotina de descontaminação de sinais via wavelets (técnica *waveshrink* de Donoho) para descontaminar o sinal padrão "electrical consumation=lelecum" (demo).

*127 Empregando as informações da URL http://www2.ee.ufpe.br/codec/WEBLET.html, insira a wavelet deO na caixa de ferramentas da sua versão Matlab, use *wavelet Display* e proceda a análise de um sinal a sua escolha.

RESPOSTAS A PROBLEMAS SELECIONADOS

1 Vide [LANG 1971]

2 i) $\|f\|\geq 0$ e $\|f\|=0 \Leftrightarrow f=_{p.p.} 0$;

ii) $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|, \forall \alpha \in \Re$;

iii) $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$.

3 $p(t)\geq 0$

4 $$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n=0 \\ \pi/2 & n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

5 $C_n=2\langle f(t),T_n(t)\rangle/\pi$ para $n=1,2,3\ldots$

6 $H_0(t)=1$, $H_1(t)=2t$, $H_2(t)=4t^2-2$, $H_3(t)=8t^3-12t$;

$L_0(t)=1$, $L_1(t)=-t+1$, $L_2(t)=t^2-4t+2$, $L_3(t)=-t^3+9t^2-18t+6$;

$P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$, $P_2(t)=(3t^2-1)/2$, $P_3(t)=(5t^3-3t)/2$ etc.

7 a) $f(t) \cong \sum_{n=0}^{+\infty} E_n He_n(t)$, em que $E_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t) He_n(t) dt$. b) $0<t<+\infty$, $|t|\leq 1$.

8 Vide texto (completicidade, interpretação, critério de erro, periodicidade etc.)

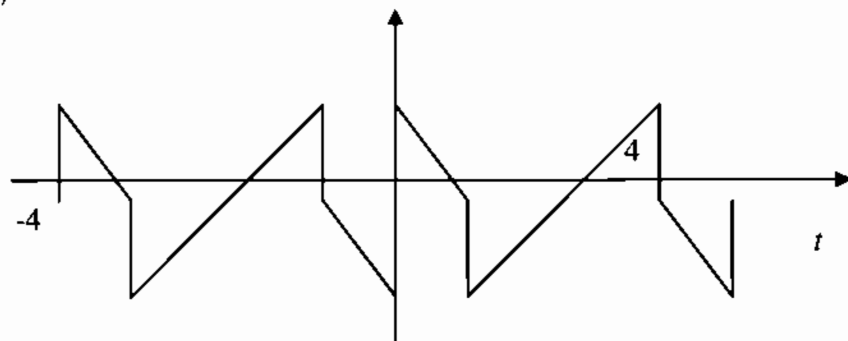
9 a) $\varepsilon = A^2/36$, b) sim.

10 $M = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} |f'(t)|\, dt$. Os coeficientes de Fourier tendem a zero, a medida que a ordem do harmônico cresce. Além disso, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 < +\infty$.

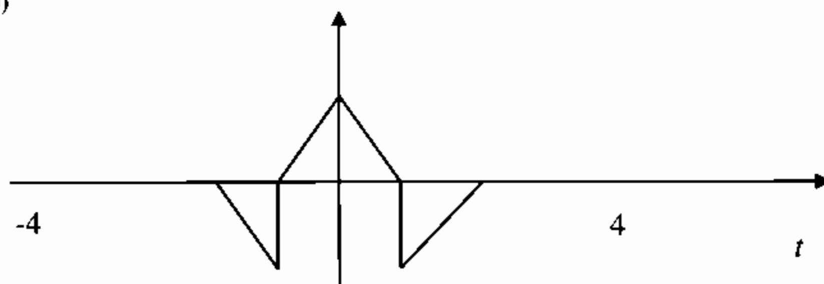
11 d) $f(t)=f(t\pm T/2)$. O período da função é $T/2$, mas a janela tomada é o dobro.

13

a)



b)



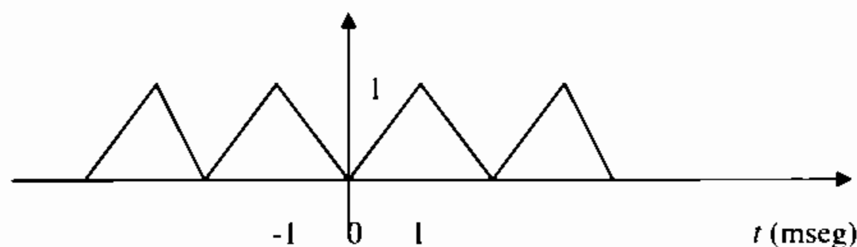
14

a) $f(t)=\begin{cases}-t & -1<t<0\\ t & 0<t<1\end{cases}$, período T=2.

b) $f(t)=\begin{cases}t+1 & -1<t<0\\ t & 0<t<1\end{cases}$, período T=2.

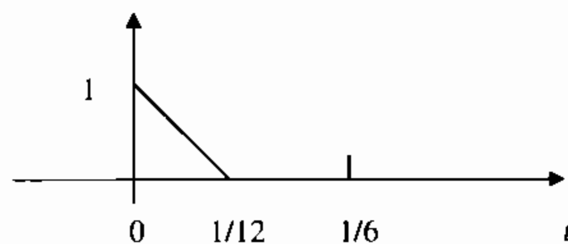
c) Use critério de Dirichlet.

15

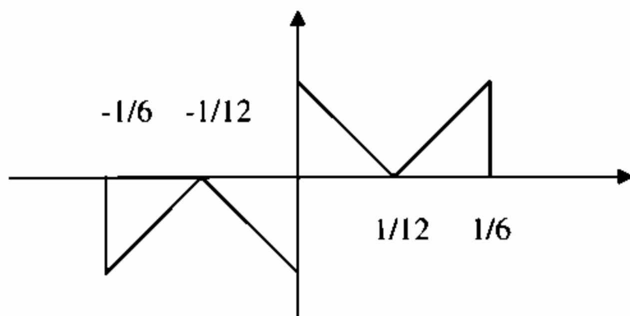


16

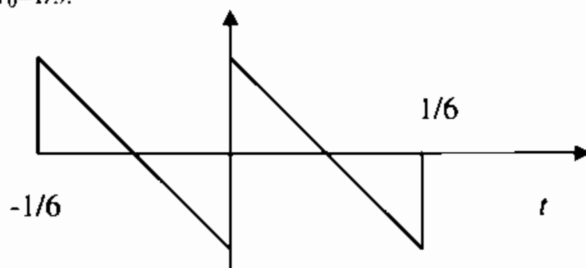
a) T_0=1/6.



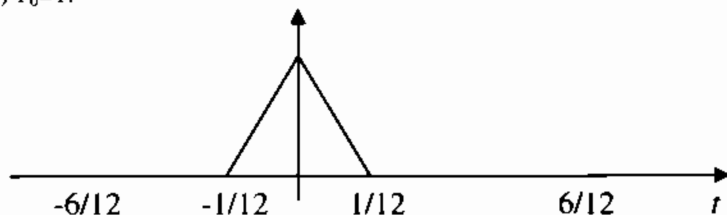
b) T_0=1/3.



c) T_0=1/3.



d) T_0=1.



17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi}(1-(-1)^n) \text{ sen } nw_0t, \quad w_0 = 2\pi/T.$

18 $\pi + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ sen}(nt).$

19 $1-2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(4n\pi t).$

20 F_n é o dobro d'aquele da onda retificada meia-onda, exceto por $F_{\pm 1}$ que passa a ser nulo. Interprete. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(4n\pi t) + \frac{\pi}{4} \text{sen}(2\pi t).$

21 a) $\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} cas(nw_0t)$, $cas(x):=cos(x)+sen(x)$.

22 $\frac{2\mu \operatorname{senh} \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}-\frac{\cos t}{1^2+\mu^2}+\frac{\cos 2t}{2^2+\mu^2}-\frac{\cos 3t}{3^2+\mu^2}+\ldots\right).$

23 $a_0=0$; $a_n=\frac{1}{8}\left\{Sa\left(2\pi\left(10^3+\frac{n\pi}{8}\right)\right)+Sa\left(2\pi\left(10^3-\frac{n\pi}{8}\right)\right)\right\}$, $n\geq 1$.

24 a série exponencial tem coeficientes $C_n=I_n(x)$.

25 $t^2\cong\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2\pi nt)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(2\pi nt)$ $0<t<1$. Avalie então a série para $t=1$ e $t=1/2$.

26 $f(t)\cong(1-e^{-1})+2.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-e^{-1})}{1+(2\pi n)^2}\left[\cos(2\pi nt)+2\pi n.sen(2\pi nt)\right]$,

$a_0=(1-e^{-1})$; $f(0)=f(1)=(1+e^{-1})/2$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+(2\pi n)^2}=\frac{(3-e)}{2(e-1)}$.

27 $f(t)\cong\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$, $0<t<T$.

28 $1+\cos t+\frac{\cos 2t}{2!}+\frac{\cos 3t}{3!}+\frac{\cos 4t}{4!}+\ldots$ e

$\operatorname{sen} t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2!}+\frac{\operatorname{sen} 3t}{3!}+\frac{\operatorname{sen} 4t}{4!}+\ldots$

31 $f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ e $f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$.

32 $f(t)\cong\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]\operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$.

33 $f(t)\cong(e-2)+\sum_{n\neq 0}\frac{(e-1)}{1+2\pi jn}.e^{j2\pi nt}$.

34 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{[1-e^{-jn\pi/2}]\,[1-e^{-jn\pi}]}{jn2\pi}\,e^{jn\pi t/2}$, $-\infty<t<+\infty$.

35 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1-e^{-aT}}{aT+jn2\pi}\right]e^{jnw_0t}$, $-\infty<t<+\infty$, $w_0=2\pi/T$.

37 Para $t_0=0$, $A=1$ e $\tau=T/3$, $f(t)\cong\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}Sa\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$ $-\infty<t<\infty$.

A escada corresponde portanto a

$$f_{escada}(t) = f(t-\frac{T}{6}) + 2f(t-\frac{T}{2}) + 3f(t-\frac{5T}{6}) .$$

38 a) $e^{-a(t-t_0)}\left[u(t) - e^{at_0}u(t-t_0)\right]$; b) $= \begin{cases} 0 & t \le -2 \\ \frac{1}{3} + \frac{(t+1)^3}{3} & -2 \le t \le 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{(t-1)^3}{3} & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$

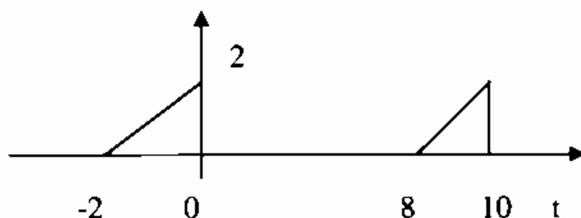
39 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Lambda(t-nT)$.

40 9, $(t-2)^2$, $\sqrt{7}.\delta(t-7)$, $\ln|t|$, 0, $e^{1/2}/2$, 0.

41 a) $(1-e^{-t}).u(t)$; b) $(1-e^{-2t}).u(t)/2$; c) $t^3/3\,!\,u(t)$; d) $e^{-bt}/(a-b)$, $a>b$.

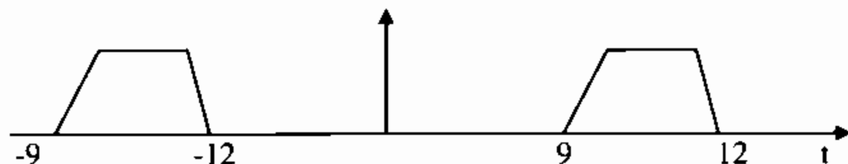
42

a)

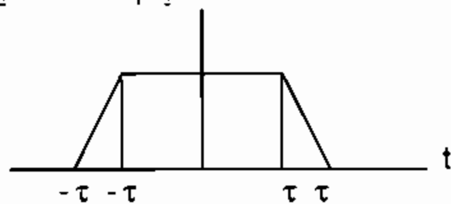


b) $\delta(w-w_0-w_1)$

c)



44 $\tau = (\tau_1+\tau_2)/2$ e $\underline{\tau} = (\tau_1-\tau_2)/2$.



45 $\delta(t)$

47 a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i)}{|g'(t_i)|}$.

48 $E_{av} = \sum_{n=-N}^{N} |F_n|^2$.

49 a) periódico; b) aperiódico; c) superposição de componente de a e b.

50 Não, a derivada "destrói" o conteúdo dc do sinal.

51 Porta: definição, derivação; triangulo: derivação, convolução.

52 a) $F(w) = \dfrac{Sa(w)e^{jw} - Sa\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-j3w/2}}{jw}$; b)

$$\frac{A\tau}{2}\left\{Sa\left(\frac{(w-w_c)\tau}{2}\right) + Sa\left(\frac{(w+w_c)\tau}{2}\right)\right\}.$$

53 a) $\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(w)$; b) $Sa(w_0(t-t_0)) \leftrightarrow \frac{1}{2w_0}\Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right)e^{-jwt_0}$; c)

$3Sa\left(\frac{w}{2}\right)e^{-j3.5w}$;

d) $\dfrac{1}{2\pi|a|}\dfrac{d^2}{dw^2}\left\{\pi F\left(\frac{w}{a}\right) + F\left(\frac{w}{a}\right) * \frac{e^{-j2w}}{jw}\right\}$; e)

$$\frac{\tau}{2}\left\{Sa\left(\frac{(w+w_0)\tau}{2}\right) + Sa\left(\frac{(w-w_0)\tau}{2}\right)\right\}.$$

54 Use $\Lambda + \Pi$. $A\tau Sa^2(w\tau/2) + 2A\tau Sa(w\tau)$.

55 $F_2(w) = -3jSa\left(\frac{w}{4}\right)sen\left(\frac{w}{4}\right)$.

56 $2\pi A\delta(w) - 2\tau ASa(w\tau)$.

57 12 Sa(6w)-8 Sa(4w), ou 4 Sa(w)cos(5w) e.g., Definição, derivada e convolução.

58 2 $Sa^2(w/2)$ cos2w.

59 $-\frac{1}{|a^3|}F^{(2)}\left(\frac{w}{a}\right)$, $\frac{1}{|b|}e^{-jw\frac{a}{b}}F\left(-\frac{w}{b}\right)$, $F(w)e^{-j4w}$, $F(w-w_0)$.

60 $jF'(w)$, $F(w) + wF'(w)$, $-\frac{j}{4}F'\left(-\frac{w}{2}\right)$, $-jF'(w)e^{-jwk}$.

61 $\pi\,\delta(w-a)e^{j\theta_0} + \pi\pi\,\delta(\ +a)e^{-j\theta_0}$.

62 $\frac{A\pi}{5}\left[\mathrm{Sa}(\frac{\pi}{5}(w-20)+\mathrm{Sa}(\frac{\pi}{5}(w+20)\right]$.

63 $\pi.\left\{\Pi\left(\frac{w-w_0}{2}\right)+\Pi\left(\frac{w+w_0}{2}\right)\right\}\cos(w+w_0)t_0$; $\frac{1}{4}\Lambda\left(\frac{w}{4}\right)$.

64 $\frac{w_c}{w_c^2-w^2}+\frac{\pi}{2j}\left[\delta(w-w_c)-\delta(w+w_c)\right]$;

$\frac{jw}{w_c^2-w^2}+\frac{\pi}{2}\left[\delta(w-w_c)+\delta(w+w_c)\right]$.

65 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \leftrightarrow e^{-w^2/2}$.

66 a) $2.Si(|w|)$; b) $j\frac{dSa(w)}{dw}$.

67 $-|\pi/w|$.

68 $\tau\frac{Sa(w\tau a}{1-(w\tau w\tau)^2}$

69 a) $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}e^{-\sqrt{\frac{a}{b}}|w|}.e^{-jwt_0}$; b) $A\Lambda\left(\frac{w}{2w_0}\right).e^{-jw\tau}$.

70 $\begin{cases} 2j\tau.\left[e^{-t\tau}\left(\frac{e^{t\tau}-e^{\tau^2}}{2j\tau^2}\right)+e^{t\tau}\left(\frac{e^{-t\tau}-e^{-\tau^2}}{2j\tau^2}\right)\right] & |t|\le\tau \\ 2j\tau.e^{-\tau|t|}.Sa(\tau^2) & |t|\ge\tau \end{cases}$.

71 a) $\left[\pi A\,\delta(w-w_0)e^{-j\theta}+\pi A\,\delta(w+w_0)e^{j\theta}\right]-j\,\mathrm{sgn}(w)$.

72 $\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\left[K\left(\frac{2\beta b-w}{\sqrt{2\beta\pi}}\right)-K\left(\frac{2\beta a-w}{\sqrt{2\beta\pi}}\right)\right]e^{-jw^2/4\beta}$

73 $V(w) = A\tau \exp\left[-(w\tau/2\sqrt{\pi})^2\right]$.

74 $\left|\frac{2\pi}{w}\right|^{1/2}$

75 $X(w) = \frac{A}{w_0}\ \mathrm{sgn}(a)\left[arctg\left(\frac{w+w_0}{a}\right)-arctg\left(\frac{w-w_0}{a}\right)\right]$, $|w|<+\infty$.

76 $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(w)$. Em particular, $F^{(n)}(0) = \Im(-jt)^n f(t) \,\big|_{w=0}$ $\therefore F^{(n)}(0) = (-jt)^n m_n$.

78 $A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\exp\left(-\tau^2(w+w_0)^2/2\pi\right)e^{-jw_0t_0} + \left(-\tau^2(w-w_0)^2/2\pi\right)e^{jw_0t_0}\right]e^{-jwt_0}$

79 $e^{-|w|}$.

80 $F(w) = \frac{2A}{b-a}\left(\frac{\cos\, aw - \cos\, bw}{w^2}\right)$.

81 $J_0(aw)$.

82 4 Sa(w/2) Sa(w) Cos(5w/2).

83 $\frac{\pi A}{2}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} Sa\frac{n\pi}{2}\delta(w-\frac{n\pi}{2}-200) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Sa\frac{n\pi}{2}\delta(w-\frac{n\pi}{2}+200)\right]$.

84 $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}e^{-\sqrt{a/b}|w|}$.

85 $Aae/(a+jw)^2$.

86 sinal ímpar, espectro imaginário puro $\frac{1}{j}\left(\frac{1}{\pi w} * \frac{2|a|}{a^2+w^2}\right)$.

87 $\frac{4V\tau}{(w\tau)^2}.\left(Sa(w\tau) - \cos(w\tau)\right)$.

89 $\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}.e^{-w^2/2}$

90 $K = 1/2^{n/2}\Gamma(n/2)$ e $F(w) = (1+2jw)^{-n/2}$.

91 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{\exp\left[j\left(\frac{\beta+w}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - j\frac{\pi}{4}\right] + \exp\left[-j\left(\frac{\beta-w}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + j\frac{\pi}{4}\right]\right\}$.

92 $\sqrt{\frac{\pi/2}{w_0}}\left(\cos\frac{w^2}{4w_0} + \text{sen}\,\frac{w^2}{4w_0}\right)$.

93 $jw\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\sigma^2 w^2/2}$.

94 $\frac{Aa}{\pi}Sa\left(\frac{a}{2}(t-t_0)\right).\cos\left(w_0(t-t_0)\right)$.

95 $f(t) = \frac{w_1}{\pi}Sa(w_1 t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nw_0 t)\right]$.

96 a) $\frac{1}{2}\delta(t-t_0) - \frac{e^{-jw_0(t-t_0)}}{2\pi j(t-t_0)}$; b) j/t; c) use $\Im\left(\frac{A}{2}+\frac{A}{2}\cos 2w_0 t\right)$; d) $\frac{1}{w_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\frac{2\pi m}{w_0})$;

e) $\frac{aA}{2\pi}\cos(w_0 t).Sa\left(\frac{at}{2}\right)$.

97 Use $sen(\beta w)u(w)+sen(-\beta w)u(-w)$.

98 $1-2Q\left(\frac{t}{\sigma}\right)$. (use $\frac{1}{2\pi}\text{sgn}(t)*\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2/2\sigma^2}$).

99 $u(t)*\frac{w_0}{\pi}Sa(w_0 t)$.

100 $\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{2}\right)*\frac{1}{2}[\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)]=\frac{1}{4}\left\{\Pi\left(\frac{t-t_0}{2}\right)+\Pi\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\}$.

101 $f(t)=\frac{Aw_0}{\pi}\ Sa^2(w_0 t/2)\ \cos w_0 t$ e $f(t)=\frac{2j}{\pi}\ Sa(t)\ \text{sen}(t)$.

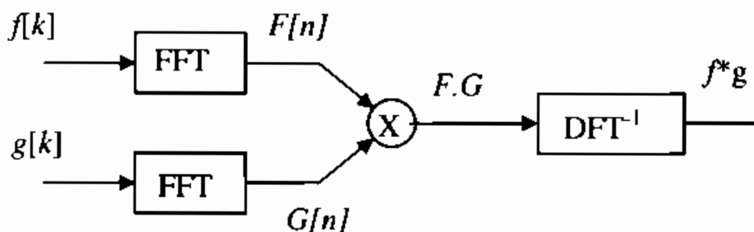
102 $f_1(t)=\frac{w_0}{\pi}.Sa(w_0 t)$, $f_2(t)=\frac{w_0}{\pi}.Sa(w_0(t-t_0))$, $f_3(t)=\frac{1}{\pi t}*Sa(w_0 t)$.

103 a) $\cos(w_0 t)u(t)$ b) $\frac{j}{\pi}Sa^2(t/2)\text{sen}(t)$.

104 $e^{-aw^2}Sa(bw)\leftrightarrow\frac{1}{4b}\left[erfc(2\sqrt{a}t-b)-erfc(2\sqrt{a}t+b)\right]$.

105 $\begin{cases}\frac{A}{2t_0}(1-\frac{|t|}{2t_0}) & |t|\le 2t_0\\ 0 & \text{senão.}\end{cases}$, e $\frac{1}{\pi}Sa^2(t/2).\cos\ 3t$.

106



107 trivial.

108 a) $\{1, 0\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+j}{4}, 0, \frac{1-j}{4}\right\}$

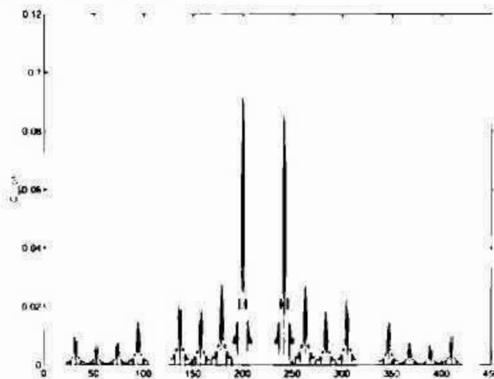
109 $F(n) = \frac{m}{N} \exp(-2\pi j \frac{n}{N} \frac{m-1}{2}) \frac{\text{sen}(\pi m/N)}{m \,\text{sen}(\pi n/N)}$.

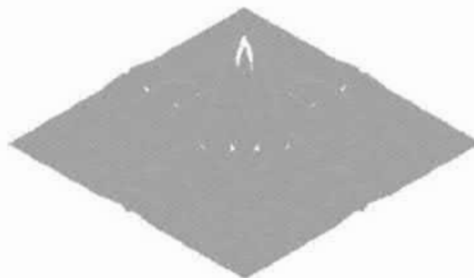
110 $\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} \leftrightarrow F_1(u, v) + F_2(u, v)$;

$\{f(x - x_0, y - y_0)\} \leftrightarrow F(u, v) \exp(- j2\pi(ux_0 + vy_0))$

$a, b \neq 0$ $\{f(ax, by)\} \leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$;

111 $|C_{mn}| = \alpha\beta |\text{Sa}(m\pi\alpha) \text{ Sa}(n\pi\beta)|$.





112 $\sum_{-\infty}^{+\infty} f(kT_S) = f_S \sum_{-\infty}^{+\infty} F(nf_S)$.

115 $f(x,y) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{m}{2f_{mx}}, \frac{n}{2f_{my}}) Sa(2\pi f_{mx} x - m\pi\pi) Sa 2\pi f_{my} y - n\pi\pi), \infty < x,y < +\infty$.

116 $|t| \leftrightarrow -\frac{2}{w^2}$ e $tu(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(w) - \frac{1}{w^2}$.

117 A transformada da porta $F(\kappa) = AaSa\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)$. A distribuição de intensidade da luz difratada I é proporcional ao quadrado da amplitude do padrão de difração, $I=F^2(\kappa)$.

118 Roteiro:

a. Mostre que $\Psi_{a,b}(w) = \sqrt{|a|}\Psi(aw)e^{-jwb}$;

b. Aplique o teorema da energia de Parseval e escreva CWT em termos de $F(w)$ e $\Psi_{a,b}(w)$;

c. Interpretando o domínio temporal como b, identifique o par $CWT(a,b) \leftrightarrow F(w)\sqrt{|a|}\Psi^*(aw)$;

d. Aplique a definição de transformada de Fourier, multiplique ambos os membros por $\sqrt{|a|}\Psi(aw)$, $a\neq 0$;

e. Use o "item b" e estabeleça $F(w).\frac{|\Psi(aw)|^2}{|a|} = \int_{-\infty}^{+\infty} CWT(a,b)\Psi_{a,b}(w)\frac{db}{a^2}$ e deduza o resultado integrando com relação à variável de escala.

119 CWT=0 independente da wavelet usada. Não é possível recuperar o sinal, pois a análise estuda apenas o comportamento passa-faixa (flutuante). A função de escala deveria ser usada.

120 a) $C(a,b-t_0)$; b) $\frac{1}{\sqrt{|k|}}.C(ka,kb)$.

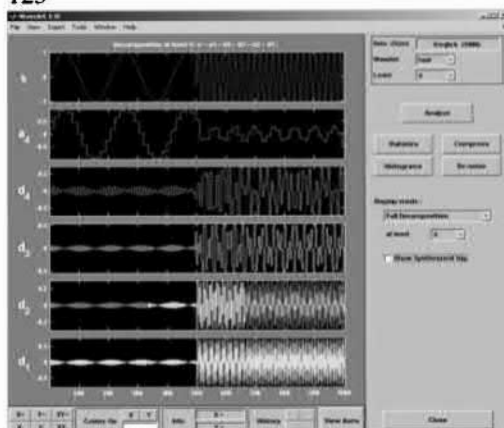
121 $\prod\left(\frac{w-3\pi/2}{\pi}\right)+\prod\left(\frac{w+3\pi/2}{\pi}\right)$.

122 $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$, $\Phi(w) = \frac{2\pi^{1/4}}{\sqrt{3}}\sqrt{w^2+1}\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$.

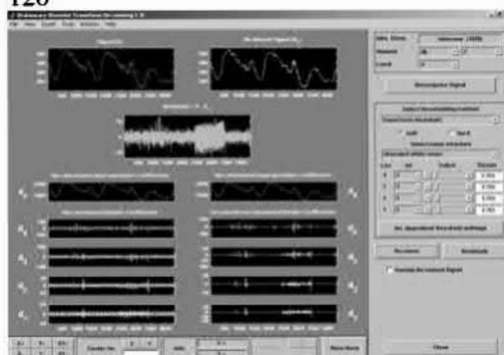
123 $f(t)=Sinc(.)$ é banda limitada em π rad/seg de modo que a formula de reconstrução $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{n}{2f_m})Sa(w_m t - n\pi)$ implica em $Sinc(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n).Sinc(2t-n)$.

124 A equação de escala dupla estabelece que uma função de escala de Mallat verifica $\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n\phi(2t-n)$. Assim, $Sinc(.)$ pode ser usada como uma função de escala, associada à wavelet de Shannon.

125



126



127

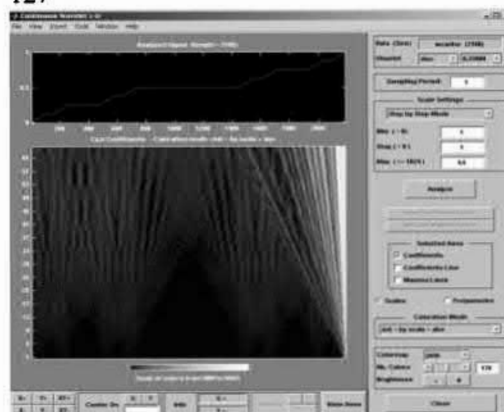


TABELA.

$$Si(x) = \int_0^x Sa(\zeta)d\zeta \ .$$

x	Si(x)	Si(x+0,5)
0	0,0000	0,4931
1	0,9461	1,3247
2	1,6054	1,7785
3	1,8487	1,8331
4	1,7582	1,6541
5	1,5499	1,4687
6	1,4247	1,4218
7	1,4546	1,5107
8	1,5742	1,6296
9	1,6650	1,6745
10	1,6583	

Bibliografia Selecionada e Fontes de Referência

Análise de Sinais para Engenheiros: Uma Abordagem via Wavelets, H.M. de Oliveira, Editora Brasport, Rio de Janeiro. 2007.
Fourier: **Théorie analytique da la chaleur**, J.B. Fourier, 1822, reprint 1988, Editions Jacques Gabay, Paris.

[ABRA&STE, 1968] M.Abramowitz e I. Segun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions, Nova Iorque: Dover, 1968.

[AKAY, 1997] A. Akay, Time Frequency and Wavelet in Biomedical Engineering, IEEE Press, 1997.

[ALD&UNS, 1996] A. Aldroubi e M. Unser (Ed.), Wavelets in Medicine and Biology, Boca Raton: CRC Press Ed., 1996.

[ALEX *et al.*, 1993] K.S. Alexander, K. Baclawski, G.C. Rota, A Stochastic Interpretation of the Riemann zeta Function, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, USA, vol.90, pp.697-699, 1993.

[ANDRÉ, 1989] R. André-Jeannin, Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes, *C. R. Acad. Sci.*, Ser. I, vol.308, pp.538-541, 1989.

[ARF, 1977] G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic press, Int. ed., 4.9 edição, 1977.

[ARGO *et al.* 1989] F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, G. Grasseau, Wavelet Transform of Fractal Aggregates, *Physics Letters A*, March, vol. 135, pp.327-336. 1989.

[AVI, 1974] G.S.S. Ávila, Funções de uma variável complexa, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

[BAL, 1998] R. Balan, An Uncertainty Inequality for Wavelet Sets, *Applied and Computational Harmonic Analysis,* vol. 5, pp. 106–108, 1998.

[BART, 1966] R. G. Bartle, Elements of Integration. Wiley, 1966.

[BATT, 1997] G. Battle, Heisenberg Inequalities for Wavelet States, *Applied and Computational Harmonic Analysis,* vol. 4, pp. 119–146, 1997.

[BAY&MAC, 1988] F. Bayen e C. Marcaria, Distributions, Analyse de Fourier, Transformation de Laplace. 3ème tome, Col. Ellipses, Marketing, 1988.

[BEI, 1994] A. Beiser, Concepts of Modern Physics, McGraw-Hill Series in Fundamental Physics, 1994.

[BENE *et al.*, 1987] S. Benedetto, E. Bighieri, V. Castellani, Digital Transmission Theory, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

[BOU, 1964] M. Bouix, Les Fonctions Généralisées ou Distributions, Paris: Masson, 1964.

[BRA, 1978] R.N. Bracewell, The Fourier Transform and its Applications, Nova Iorque: McGraw-Hill, 1978.

[BRA, 1983] R.N. Bracewell, The Discrete Hartley Transform, *J. Opt. Soc. Amer.*, vol.73, pp.1832-1835, Dec., 1983.

[BRA&BRI, 1994] J.N. Bradley e C.M. Brislawn, The Wavelet/Scalar Quantization Compression Standard for Digital Fingerprinting Images, *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, ISCAS'94, vol.3, pp. 205-208, 1994.

[BRI, 1988] E.O. Brigham, The Fast Fourier Transform and its Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

[BRU, 1919] V. Brun, La série oú les dénominateurs sont "nombres premiers jumeaux" est convergente ou finie, *Bull. Sci. Math.*, vol.43, pp.124-128, 1919.

[BRU *et al.*, 1996] A. Bruce, D. Donoho, M-Y. Gao, Wavelet Analysis, *IEEE Spectrum*, October, pp. 26-35, 1996.

[BULT, 1995] A. Bultheel, Learning to Swim in a Sea of Wavelets, *Bull. Belg. Math. Soc.* vol. 2, pp.1-46, 1995.

[BUR, 1997] D.M. Burton, Elementary Number Theory, McGraw-Hill, 1997.

[BURR, *et al.*, 1997] C.S. Burrus, R.A. Gopinath e H. Guo, Introduction to wavelets and wavelet transforms: A Primer, New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

[CAM *et al.*, 1998] R.M. Campello de Souza, H.M. de Oliveira, A.N. Kauffman, A.J.A. Paschoal, Trigonometry in Finite Fields and a New Hartley Transform, *Proceedings of the 1998 IEEE Intern. Symp. on Info. Theory*, p.293, Cambridge, MA, Aug., 1998.

[CER *et al.*, 1969] G.A. Cerveira *et alli*, Algoritmo FFT para determinação da Transformada de Fourier, *Revista Técnica* - Instituto de Alta Cultura, Lisboa, vol. 31, n.391, 1969.

[CHRIS *et al.*, 2000] C. Christopouos, A. Skoras, T. Ebrahimi, The JPEG2000 Still Image Coding System: An Overview, *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, vol. 46, Nov., pp. 1103-1127, 2000.

[CHU, 1975] R.V. Churchill, Variáveis Complexas e suas Aplicações, [Complex Variables and its Applications] São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

[CHUI, 1992] C.K. Chui, An Introduction to Wavelets, San Diego: Academic Press, 1992.

[CIN&deO, 2004] R.J.S. Cintra e H.M. de Oliveira, A Short Survey on Arithmetic Transforms and the Arithmetic Hartley Transform, *Journal of the Brazilian Telecommnications Society*, vol. 19, n. 2, August, pp.68-79, 2004.

[COH, 1992] A. Cohen, Ondelettes et Traitement Numérique du Signal, Paris: Masson, 1992.

[COH, 1995] A. Cohen, Time-Frequency Analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Signal Processing Series, 1995.

[COI&MEY, 1991] R.R. Coifman e Y. Meyer, Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre, *Compte rendus de l'Académie des Sciences, serie I: Mathématique*, vol. 312, pp. 259–261, 1991.

[COI&WIK, 1995] R.R. Coifman e M.V. Wickerhauser, Adapted Waveform "de-noising" for Medical Signals and Images, *IEEE Eng. in Medicine and Biology*, vol. 14, n.5, Sept. pp. 578-586, 1995.

[COOL, 1987] J.W. Cooley, How FFT Gained Acceptance, *ACM*, pp. 97-100, 1987.

[DAU, 1988] I. Daubechies, Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Comm. Pure and Applied Math.*, vol. 41, pp.909-996, 1988.

[DAU, 1992] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, Philadelphia, PA: Soc. for Ind. and Applied Math., 1992.

[DAVE&ROOT, 1959] W.B. Davenport Jr e W.L. Root, An introduction to the Theory of Random Signals and Noise, Nova Iorque: McGraw-Hill, 1958.

[DELL, 1994] J.R. Deller Jr., Tom, Dick, and Mary Discover the DFT, *IEEE Signal Process Mag.*, April, pp. 36-50, 1994.

[deO, 2004] H.M. de Oliveira, Shannon and Renyi Entropy of Wavelets, *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, SBrT'04, Belém, Pará, 6-9 Setembro, 2004.

[deO *et al.*, 1999] H.M. de Oliveira, R.M. Campello de Souza, A.N. Kauffman, Efficient Multiplex for Band-limited Channels: Galois Division Multiple Access, *Proceedings of the 1999 Workshop on Coding and Cryptography*- WCC-99, pp. 235-241, Paris, Jan., 1999.

[deO *et al.*, 2000] H.M. de Oliveira, R.J. Sobral Cintra, R.M.C. Souza, Multilevel Hadamard Decomposition of Hartley Transforms, *XVIII Simpósio Bras. de Telecomunicações*, SBrT 2000, Gramado, RS, Caucala: Nordeste digital line, 2000.

[deO *et al.*, 2001] H.M. de Oliveira, R.J.S. Cintra, R.M.C. Souza, A Factorization Scheme for Discrete Hartley Transform Matrices, Proc. *International Conference on System Engineering, Comm. and Inform. Technologies*, 2001, Punta Arenas, 2001.

[deO *et al.*, 2002a] H.M. de Oliveira, T.H. Falk, R.G.F. Távora, Decomposição Wavelet sobre Corpos Finitos, *Rev. da Soc. Bras. de Telecomunicações*, Número especial, Campinas, SP, vol. 17, n.1, pp. 38 - 47, 2002.

[deO *et al.*, 2002b] H.M. de Oliveira, L.R. Soares, T.H. Falk, A Family of Wavelets and a New Orthogonal Multiresolutional Analysis Based on the Nyquist Criterion, *IEEE SBrT Int. Telecomm. Symposium*, Natal, RN, Sept., 2002.

[deO *et al.*, 2003a] H.M. de Oliveira, H.A.N. Silva, E.A. Bouton, Wavelet Shift-Keying: A New Digital Modulation, *Anais do XX Simpósio Bras. de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, 5-8 Outubro, 2003.

[deO *et al.*, 2003b] H.M. de Oliveira, L.R. Soares, T.H. Falk, A Family of Wavelets and a New Orthogonal Multiresolution Analysis Based on the Nyquist Criterion, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*. Campinas, SP, vol. 18, n. 1, número especial, pp. 71-78, 2003.

[deO&BOU, 2006] H.M. de Oliveira e E.A. Bouton, Multiresolution Division Multiplex (MRDM): A New Wavelet-based Multiplex System, VI *International Telecommunications Symposium* (ITS2006), September 3-6, Fortaleza, Brazil, 2006.

[deO&RAM, 1995] H.M. de Oliveira e P.S.C. Ramos, Análise Espectral de Sinais: Uma Visão de Ensino Voltada à Engenharia, In: *XXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, COBENGE, 1995, Recife. Anais do COBENGE'95, vol. 1, pp.199-208, 1995.

[deO&SOU, 2001] H.M. de Oliveira e R.M.C. Souza, A Fast Algorithm for Computing the Hartley/Fourier Spectrum, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*. Rio de Janeiro, vol. 73, pp. 468-468, 2001.

[deO&SOU, 2006] H.M. de Oliveira e D.F. Souza, Wavelet Analysis as an Information Processing Technique, VI *International Telecommunications Symposium* (ITS2006), September 3-6, Fortaleza, Brazil, 2006.

[DES, 1997] J-M. Deshouillers, Probability and Number Theory: some examples of connections, 1997.

[DO&VETT, 2000] M.N. Do e M. Vetterli, Orthonormal Finite Ridgelet Transform For Image Compression, *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, pp. 367 -370, 2000.

[DONO, 1993] D.L. Donoho, Wavelet Shrinkage and WVD: A 10-minute Tours, Progress in Wavelet Applications, Y. Meyer, S. Roques eds, Editions Frontieres, 1993.

[DONO, 1995] D.L. Donoho, De-noising by Soft-Thresholding, *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 41, Mar., pp. 613-627, 1995.

[FIGU, 1977] D.G. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada / CNPq, 1977.

[FOU, 1995] Wavelets and their Applications in Computer Graphics, Alain Fournier Ed., Siggraph´94, Course Notes, 1995. Disponível em ftp.cs.ucb.ca/pub/local/bobl/wvlt

[GAB&ROB, 1987] R.A. Gabel e R.A. Roberts, Signal and Linear Systems, 3rd ed., Singapora: Wiley, 1987.

[GAB, 1946] D. Gabor, Theory of Communications, *J. IEE* (Londres), vol. 93, pp. 429-457, 1946.

[GAB, 1953a] D. Gabor, Communication Theory, Past, Present and Prospective, *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT-1, pp. 2-4, February 1953.

[GAB, 1953b] D. Gabor, Communication Theory and Physics, *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT-1, pp. 48-59, February 1953.

[GAD&PAD, 2002], H.G. Gadiayr, R. Padma, Rota Meets Ramanujan: probabilistic interpretation of Ramanujan-Fourier series, *WSEAS Conference* MMACTEE-WAMUS-NOLASC, Vouliagmeni, Athens, Greece, Dec. 29-31, 2002.

[GAR, 2000] A.G. Garcia, Orthogonal Sampling Formulas, A Unified Approach, *SIAM Review*, vol. 42, n.3, pp. 499-512, 2000.

[GAS&WIT, 2000] G. Gasquet, P. Witomski, Analyse de Fourier et applications, Paris: Dunod, 2000.

[GOLO, 1992] S.W. Golomb, Probability, Information Theory, and Prime Number Theory, *Discrete Mathematics*,vol. 106-107, pp. 219-229, 1992.

[GOM *et al.*, 1987] J. Gomes, L. Velho e S. Goldenstein, Wavelets: Teoria, Software e Aplicações, Rio de Janeiro: IMPA, 216p., 1987.

[GOU-GRO&MOR, 1984] P-L. Goupillaud, A. Grossman e J. Morlet, Cycle-octave Representation for Instantaneous Frequency Spectra, *53rd Int. Meeting Soc. of Exploration Geophysicists*, p.669, Las Vegas, Sept. 11-15, 1984.

[GRA&RYZ, 1965] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik Table of Integrals, Series, and Products, 4th Ed., Nova Iorque: Academic Press, 1965.

[GRA, 1995] A. Graps, An Introduction to Wavelets, *IEEE Computer Soc.*, Summer 1995, vol. 2. pp. 50-61, 1995.

[GRA, 1999] A. Graps, *An Introduction to Wavelets*. Stanford University, 1999.
Disponível em http://www.amara.com/IEEEwave/IEEEwavelet.html

[GRO&MOR, 1984] A. Grossmann e J. Morlet, Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 15, pp. 723-736, 1984.

[GRO&TORR, 2001] A. Grossmann e B. Torrésani, Les Ondelettes, Texto de divulgação: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~torresan/universalis/ondel.html

[HAMM, 1986] R.W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd ed., Nova Iorque: Dover, 1986.

[HAR, 1942] R.V.L. Hartley, A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems, *Proc. IRE*, vol. 30, pp. 144-150, Mar., 1942.

[HAR&WRI, 1979] G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th Ed., Oxford, 1979.

[HEA&WEA, 1992] D.H. Healy Jr. e J.B. Weaver, Two Applications of Wavelet Transforms in Magnetic Ressonance Imaging, *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT 38, March, pp. 840-860, 1992.

[HEI, 1988] M.T. Heidman, Multiplicative Complexity, Convolution and the DFT, Springer-Verlag, 1988.

[HER&WEI, 1996] E. Hernandez e G. Weiss, A First Course on Wavelets, Boca Raton: CRC Press, 1996.

[HERS 1964] I.N. Herstein, Topics in Algebra, Mass.: Blaisdell Pub., 1964.

[HUBB, 1995] B.B. Hubbard, Ondes et ondelettes: La saga d´un outil mathématique, *Pour la Science*, 1995.

[JERR, 1977] A. Jerri, The Shannon Sampling Theorem – Its various Extensions and Applications: A Tutorial Review, *Proc. of the IEEE*, vol.65, N.11, Nov., pp.1565-1596, 1977.

[KAC, 1959] M. Kac, Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory, Nova Iorque: Wiley,1959.

[KAM&HEC, 1997] E.W. Kamen e B.S. Heck Fundamentals of Signals and Systems Using Matlab, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.

[KELL, 1996] S. E. Kelly, Gibbs Phenomenon for Wavelets, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 3, pp. 72-81, 1996.

[KOL&FOM, 1970] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, Introductory Real Analysis, Mineola: Dover, 1970.

[KOVA&VETT, 2001] J. Kovačević, M. Vetterli, Transfrom Coding: Past, present, and Future, *IEEE Signal Processing Maganize*, p.6, Sept., 2001.

[KREY, 1983] E. Kreyszig, Matemática Superior [Advanced Engineering Mathematics], 2nd ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

[KUM&FOU, 1997] P. Kumar e E. Foufoula-Georgiou, Wavelet Analysis in Geophysics: An Introduction, *Reviews of Geophysics*, vol. 35, pp. 385-412, 1997.

[LAN&POLL, 1961] H.J. Landau e H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty: Part I, *Bell System Tech. Journal*, vol. 40, pp. 65-84, 1961.

[LANG, 1971] S. Lang, Álgebra Linear [Linear Algebra], São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

[LATHI, 1968] B.P. Lathi, An introduction to Random Signals and Communication Theory, Scraton, Pa.: Int. textbook, 1968.

[LATHI, 1979] B.P. Lathi, Sistema de Comunicação [*Communication Systems*] Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.

[LIDL&NIE, 1986] R. Lidl e H. Niederreiter, Introduction to Finite Fields and their Applications, Cambridge University press, 1986.

[LIN&QU, 2000] J. Lin e L. Qu, Feature Extraction Based on Morlet Wavelet and its Application for Mechanical Fault Diagnosis, *Journal of Sound and Vibration* vol. 234, No. 1, pp. 135-148, 2000.

[LIRA *et al.*, 2003a] M.M.S. Lira, H.M. de Oliveira, M.A. Carvalho Jr, R.M.C. Souza, Compactly Supported Wavelets Derived from Legendre Polynomials: Spherical Harmonic Wavelets, *WSEAS Int. Conf. on Systems*, Corfu, Greece, 2003.

[LIRA *et al.*, 2003b] M.M.S. Lira, M.A. Carvalho Jr, H.M. de Oliveira, Compactação de Sinais de Distúrbios em Sistemas de Transmissão via Wavelets, XVII *Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, SNPTEE,Uberlândia, 2003.

[LIRA *et al.*, 2004] M.M.S. Lira, H.M. de Oliveira, R.J.S. Cintra, Elliptic-Cylindrical Wavelets: The Mathieu Wavelets, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, n.1, January, pp. 52-55, 2004.

[LOE, 1963] M. Loève, Probability Theory, Princeton: van Nostrand, 1963.

[MAC, 1997] D. Mackenzie, Homage to an Itinerant Master, *Science* vol. 275, p.759, 1997.

[MALL, 1989] S. Mallat, A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intellig.*,vol. 11, July, pp. 674-693, 1989.

[MALL, 2000] S. Mallat, Une Exploration des Signaux en Ondelettes, Palaiseau: Les Editions de l'École Polytechnique, 2000.

[MALV, 1988] H.S. Malvar, The LOT: A link between block transform coding and multirate filter banks, *Proc. IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, pp. 835-838, Espoo, Finland, 1988.

[MAN, 1992] J.M. Manley, The Concept of Frequency in Linear Systems Analysis, *IEEE Comm. Mag.*, pp. 26-35, Jan., 1992.

[MAN, 1995] B. Mandelbrot, Les objects fractals, Paris: Flammarion, 1995.

[MAN *et al.*, 2000] M.K. Mandal, S. Panchanathan e T. Aboulnasr, Allocation adaptive des bits et techniques de selection de résolution pour l'estimation du mouvement dans un codeur video à ondelettes, *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 25, n.3, July, pp. 113-120, 2000.

[McC&PAR, 1072] J.H. McClellan e T.W. Parks, Eigenvalue and Eigenvactor Decomposition of the Discrete Fourier Transform, *IEEE Trans. On Áudio and Electroacoustics*, vol. 20, March, pp. 66-74, 1972.

[MEE&ADH, 2001] P. Meenen e R. Adhami, Fingerprinting for Security, *IEEE Potentials*, Aug.-Sept., pp. 33-38, 2001.

[MEY *et al.*, 1987] Y. Meyer, S. Jafar e O. Rioul, L´Analyse par Ondelettes, *Pour la Science*, n.119, pp. 28-37, Sept., 1987.

[MEY, 1990] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, Paris: Hermann, 1990.

[MOR, 1997] P.A. Morettin, Ondaletas e seus Usos em Estatística. Mini-Curso apresentado na *7ª Escola de Econometria e Séries Temporais*, Canela, RS, Brasil, 6-8 Agosto de 1997.
Disponível em http://www.ime.usp.br/~pam/papers.html

[MOR, 1999] P.A. Morettin, Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas, São Paulo: Edusp, 1999.

[MOR, 1979] P. Morettin, Análise Harmônica de Processos Estocásticos, 12º Colóquio Bras. de Matemática, 1979.

[NYQ, 1924] H. Nyquist, Certain Factors Affecting Telegraph Speed, *Bell Syst. Tech. J.*, Apr., pp. 324-346, 1924.

[OKA, 1998] K. Okajima, The Gabor Function Extract the Maximum Information from Input Local Signals, *Neural Networks*, vol. 11, pp. 435-439, 1998.

[OLI&BAR 2000] P.M. Oliveira e V. Barroso, Uncertainty in the Time-Frequency Plane, Proc. of the Tenth *IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, Pocono Manor, PA, USA, pp. 607-611, 2000.

[OPP&SCH, 1975] A.V. Oppenheim e R.W. Schafer, Digital Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.

[PAPO, 1977] A. Papoulis, The Fourier Integral and its Applications, Nova Iorque: McGraw-Hill, 1962, também: Signal Analysis, McGraw-Hill, 1977.

[PEI&DIN 2002] S-C. Pei e J-J. Ding, Eigenfunctions of Linear Canonical Transform, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n.1, Jan., pp. 11-26, 2002.

[PER&WAL, 2000] D.B. Percival e A.T. Walden, Wavelet Methods for Time Series Analysis, Cambridge Press, (594p.), 2000.

[PÓL, 1957] G. Pólya, Heuristic reasoning in the theory of numbers, *American Mathematical Monthly*, vol. 66, pp. 375-384, 1957.

[POLI, 1998] R. Polikar, The Wavelet tutorial – Fundamental Concepts & an Overview of the Wavelet Theory. Iowa State University, 1998. Disponível em http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/IEEEwavelet.html

[POLL, 1971] J.M. Pollard, The Fast Fourier Transform in a Finite Field, *Math. Comput.*, vol. 25, No. 114, pp. 365-374, Apr. 1971.

[QIA&CHE 1999] S. Qian e D. Chen, Understanding Joint Time-Frequency Analysis, *IEEE Signal Proc. Mag.*, March, pp. 53-67, 1999.

[RICH, 1995] W.B. Richardson Jr., Applying Wavelets to Mammograms, *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, vol. 14, n.5, Sept./Oct., pp. 551-560, 1995.

[RIE, 1985] H. Riesel, Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, Birkhäuser, 1985.

[RIO&VET, 1991] O. Rioul e M. Vetterli, Wavelets and Signal Processing, *IEEE Signal Proc. Mag.*, Oct., pp.14-37, 1991.

[RUD, 1971] W. Rudin, Princípios de Análise Matemática, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1971.

[RUZZ *et al.*, 1997] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi e B. Piombo, Natural Frequencies and Dampings Identification Using Wavelet Transform: Application to Real Data, *Mechanical Systems and Signal Processing* vol. 11, No. 2, pp. 207-218, 1997.

[SHAN, 1993] Claude Elwood SHANNON, collected papers, N.J.A. Sloane, E.D. Wyner, Eds., IEEE press, 1993.

[SHANM 1985] K.S. Shanmugam, Digital and Analog Communication Systems, Singapore: John Wiley, 1985.

[SHI&VOL, 1996] H.-T. Shim e H. Volkmer, On the Gibbs Phenomenon for Wavelet Expansions, *Journal of Approximation Theory*, vol. 84, pp. 74–95, 1996.

[SKO *et al.*, 2001] A. Skodras, C. Chistopoulos e T. Ebrahimi, The JPEG 2000 Still Image Compression Standard, *IEEE Signal Proc. Mag.*, Sept., pp. 36-58, 2001.

[SLE, 1976] D. Slepian, On bandwidth, *Proceedings of the IEEE*, March, vol. 64, pp. 292- 300, 1976.

[SLE&POL, 1961] D. Slepian e H.O. Pollak, Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainly-I, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 15, n.1, Jan., pp. 43-63, 1961.

[SNE, 1976] I.N. Sneddon, Encyclopaedic Dictionary of Mathematics for Engineers and Applied Scientists, Oxford: Pergamon press, 1976.

[SOA *et al.*, 2003] L.R. Soares, H.M. de Oliveira, R.J. Sobral Cintra, R.M.C. de Souza, Fourier Eigenfunctions, Uncertainty Gabor, Principle and Isoresolution Wavelets, *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, Outubro, 2003.

[SOKO&RED, 1966] I.S. Sokolnikoff e R.M. Redheffer, Mathematics of Physics and Modern Engineering, 2nd ed., Tokio: Kogakusha, 1966.

[SOU *et al.*, 2005] D.F. Souza, R.J.S. Cintra, H.M. de Oliveira, Uma Ferramenta para Análise de Sons Musicais: A Série Quantizada de Fourier, *Anais do XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, SBrT'05, Campinas, SP, Setembro, 2005.

[SOU&deO, 2001] E.B. Souza Filho e H.M. de Oliveira, Estimação dos Coeficientes de uma Série de Fourier usando o Método dos Mínimos Quadrados Seqüencial In: *I Congresso de Informática da Amazônia*, 2001, Manaus. Anais do I Congresso de Informática da Amazônia, vol. 1. pp. 271-283, 2001.

[SPEN&WORS, 1993] R. Spencer e G. Worstell, A Spectrum Analyzer Laboratory Project, *IEEE Transactions on Education*, Aug., vol. 36, pp. 301-306, 1993.

[SPI, 1979] M.R. Spiegel, Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas [*Mathematical Handbook of Formulas and Tables*], São Paulo: McGraw-Hill, 1979.

[STE, 2004] E.G. Steward, Fourier Optics, 2nd ed., Dover, 2004.

[STI, 1993] R.S. Strichartz, How to Make Wavelets, *American Mathematical Monthly*, vol. 100, pp. 539-556, 1993.

[STOL *et al.*, 1995] E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, D.H. Salesin, Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 1, IEEE Computer Graphics and Applications, May, 1995.

[TASW, 2000] C. Taswell, The What, How, and Why of Wavelet Shrinkage Denoising, *Computing in Science & Engineering*, May/June, pp. 12-19, 2000.

[TAV, 2001] R.G.F. Távora, Algoritmos Rápidos para Transformadas em Corpos Finitos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, pp.97, 2001.

[TAV *et al.*, 2001] R.G.F. Távora, R.M. Campello de Souza e H.M. de Oliveira, Um Algoritmo Rápido para a Transformada de Wavelet em Corpos Finitos, *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, SBrT, 03-06 Set., Fortaleza, CE, 2001.

[TAY, 1992] P. Taylor, Principles of Signals and Systems, Nova Iorque: McGraw-Hill, 1992.

[TOR&COM, 1998] C. Torrence e G.P. Compo, A Practical Guide to Wavelet Analysis, *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 79, n.1, Jan., pp .61-78, 1998.

[TOR, 1999] B. Torrésani, An Overview of Wavelet Analysis and Time-Frequency Analysis, Proc. of the *Int. Workshop in Self-similar Systems*, July-August, Dubna, Russia, JINR, E5-99-38, Dubna 1999, pp. 9-34. Disponível em: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~torresan/lectures.html

[UNS&ALD, 1996] M. Unser e A. Aldroubi, A Review of Wavelets in Biomedical Applications, *Proc. of the IEEE*, April, pp. 626-638, 1996.

[VAL, 1999] C. Valens, A Really Friendly Guide to Wavelets, 1999. Disponível em http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelet

[von BAE, 1999] H.C. von Baeyr, Catch the Wave (PHYSICA), *The Sciences*, May/June, pp. 10-13, 1999.

[WEA, 1989] J. Weaver, Theory of Discrete and Continuous Fourier Transform, Nova Iorque: John Wiley, 1989.

[WEI, 2000] A.B. Weinholtz, Integral de Riemann e de Lebesgue em R^N, 3ª Ed., Universidade de Lisboa, DM, 2000.

[WEIS, 2006] E.W. Weisstein. "Reciprocal Fibonacci Constant." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ReciprocalFibonacciConstant.html

[WELLS, 1993] R.O. Wells Jr, Parametrizing Smooth Compactly Supported Wavelets, 1993, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 338, n.2, pp. 919-931, 1993.

[WIE, 2001] A. Wieczorkowska, Musical Sound Classification based on Wavelet Analysis, *Fundamenta Informaticæ*, vol. 47,n.1,2, July, pp. 175-188, 2001.

[WIN, 1978] S. Winograd, On Computing the Discrete Fourier Transform, *Math. Comp.*, vol.32, pp.175-199, 1978.

[WOZ&JAC, 1967] J.M. Wozencraft e I.M. Jacobs, Principles of Communication Engineering, Nova Iorque: Wiley, 1967.

[WRI, 1997] G.A. Wright, Magnetic Ressonance Imaging, *IEEE Signal Proc. Mag.*, p. 56,Jan., 1997.

[YOU, 1993] R.K. Young, Wavelet Theory and its Applications, Norwell, MA: Kluwer Ac. Press, 1993.

ÍNDICE REMISSIVO

BREVE CRONOLOGIA

Fourier	Gibbs	Kotel'nikov	Wiener	Tukey	Heidman
Dirichlet	Dini	Nyquist	Gabor	Cooley	Mallat
Parseval	Hilbert	Riesz	Shannon	Winograd	Morlet
Fejér	Volterra	Haar	Lanczos	Slepian	Daubechies
Weierstrass	Helmoltz	Lebesgue	Kolmogorov	Pollard	Bracewell
				Hartley	Tufts
1800-1850	1850-1900	1900-1925	1925-1950	1950-1975	1975-2000

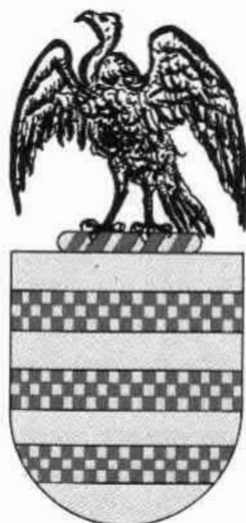
ÍNDICE ONOMÁSTICO

O Autor:
Hélio Magalhães de Oliveira (59–), BEE (80), MEE (83), Docteur (92).

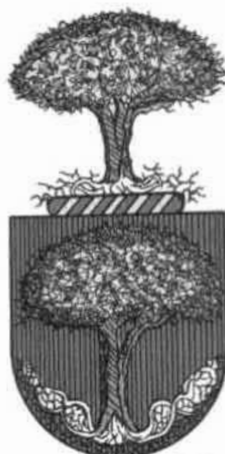


H.M. de Oliveira nasceu em Arcoverde, Pernambuco, em Maio 1959. Ele recebeu os graus de Engenheiro aos 21 anos e Mestre em Engenharia Elétrica (MEE) da Universidade Federal de Pernambuco em 1983. Ingressou no **Departamento de Eletrônica e Sistemas** DES-UFPE como Docente em 1983, e em 1992 recebeu o grau de *Docteur de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications*, Paris, especialidade em Eletrônica e Telecomunicações. Foi professor homenageado de cerca de 50 turmas de formandos em Engenharia Elétrica e Engenharia da Computação, e escolhido paraninfo das turmas de Engenheirandos 2006.2; 2006.1; 2005.1; 2004.2; 2004.1; 2001.1. Coordenou o Mestrado de Engenharia Elétrica da UFPE de 1992 a 1996. É autor do livro texto *Análise de Sinais para Engenheiros: wavelets*, Editora Brasport, 2007, série da Soc. Bras. de Telecom. Interesses: Análise de Sinais (incluindo análise de Fourier, wavelets, sinais em corpos finitos, sinais biomédicos, sinais genômicos etc.), Teoria das Comunicações, Teoria da Informação aplicada (códigos corretores de erros, modulação codificada, reticulados, coberturas e empacotamentos), Processamento de Sinais, Físico-química de Interfaces, planejamento racional de fármacos (QSAR). Dr. de Oliveira é membro da *Sociedade Brasileira de Telecomunicações* e escolhido editor de Área do **Journal of Communication and Information Systems** (JCIS) em 2005-2007.

BRASÃO dos OLIVEIRA



Magalhães



Oliveira (moderno)

INFORMAÇÕES GRÁFICAS

FORMATO	15,5 × 22 cm
TIPOLOGIA	Times New Roman
PAPEL	MIOLO: off-set 90g/m² CAPA: Triplex 250 g/m²

Montado e impresso na oficina gráfica da

Editora Universitária UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 – Várzea
Recife | PE CEP: 50.740-530 Fax: (0xx81) 2126.8395
Fones: (0xx81) 2126.8397 | 2126.8930
www.ufpe.br/editora · edufpe@nlink.com.br · editora@ufpe.br